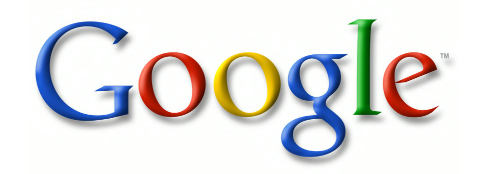



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909612 5



Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

von

Dr. Theodor Wittstein,
Professor.

Erster Band. Zweite Abtheilung.

Planimetrie.

Zwölfte Auflage.

Hannover.
Hahn'sche Buchhandlung.
1880.

Hannover. Druck von Fr. Culemann.

Vorrede

zur zweiten Auflage.

Ueber Zweck und Plan des Lehrbuchs der Elementar-Mathematik, von welchem die Planimetrie hier in zweiter Auflage vorliegt, findet man in der Vorrede zur ersten Abtheilung des ersten Bandes das Nähere aus einander gesetzt. Dieser Plan scheint im Ganzen nicht ohne Beistimmung geblieben zu sein; das Buch ist in mehreren Schulen eingeführt, und schon die Rücksicht hierauf ließ es nöthig erscheinen, diese neue Auflage so der ersten anzuschließen, daß beide ohne Störung neben einander gebraucht werden können. Aber auch davon abgesehen, habe ich nach eigenem mehrjährigen Gebrauche dieses Buchs keinen Anlaß gefunden, etwas Wesentliches zu ändern, und somit ist es mir leider auch nicht möglich gewesen, alle die in schätzbaren Recensionen mir zugegangenen Bemerkungen und Andeutungen vollständig zu berücksichtigen. Doch hat der Text der Planimetrie in dieser zweiten Auflage eine Bereicherung durch eine Anzahl von Zusätzen und Anmerkungen erfahren, welche sich beim Gebrauche als zweckmäßig herausgestellt haben. Am meisten ist dies in dem Abschnitte von der Inhaltsberechnung der Figuren geschehen, der in der ersten Auflage offenbar zu dürftig ausgefallen war und jetzt mit dem entsprechenden Abschnitte der Stereometrie von der Inhaltsberechnung der Körper besser im Einklange stehen wird.

Hannover, im März 1862.

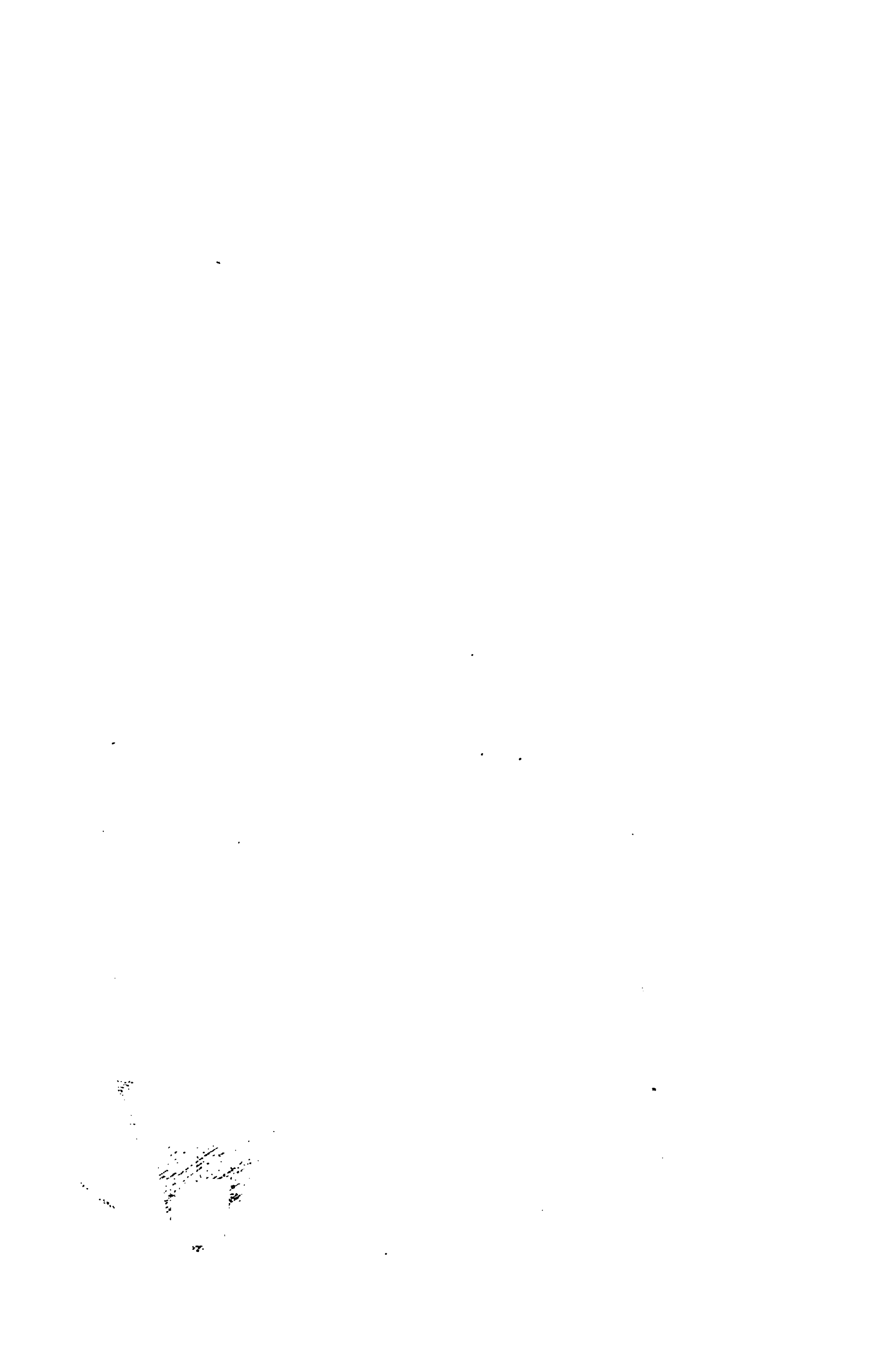
Zur zwölften Auflage.

Die freundliche Aufnahme, welche diese Planimetrie findet und von welcher die wachsenden Auflagen Zeugniß geben, ist mir eine erfreuliche Anregung gewesen, den Text wiederholt einer sorgfältigen Durchsicht zu unterziehen. Zu größeren Änderungen hat sich kein Anlaß gefunden, dagegen hoffe ich durch verschiedene kleine Zusätze und Redactionsverbesserungen, sowie durch sorgfältige Correctur, das Buch seinem Zwecke, ein brauchbares und nützliches Schulbuch zu sein, fortwährend näher gebracht zu haben.

Hannover, im Januar 1880.

Inhalt.

Planimetrie.



Planimetrie.

Einleitung.

§. 1.

Erklärung. Den Gegenstand der **Geometrie** machen die **Raumgrößen** aus. Diese sind der **Punkt**, die **Linie**, die **Fläche** und der **Körper**.

Der Name **Geometrie** ist griechischen Ursprungs und bedeutet wörtlich so viel wie Erdmessung oder Landmessung. Diese Benennung erklärt sich aus der Entstehung der Geometrie, welche man nach Aegypten verlegt und welche **Herodot**, der um das Jahr 450 vor Christi Geburt schrieb, in seinem Geschichtswerke II, 109 erzählt wie folgt: „Der König (Sesostris) hatte auch das ganze Land unter die Aegypter vertheilt und einem jeden ein gleiches viereckiges Stück gegeben, und davon hatte er sich sein Einkommen verschafft, indem er ihnen einen jährlichen Zins auflegte. Wenn nun der Fluß von des Einen Theile etwas fortgerissen, so mußte der zum Könige kommen und davon Anzeige machen, und dieser sandte dann seine Leute hin, welche nachsehen und ausmessen mußten, um wie viel kleiner das Stück Land geworden war, damit er von dem Uebrigen bezahlte nach Maße des aufgelegten Zinses. Auf diese Art ist, glaube ich, die Geometrie entstanden und von da nach Griechenland gekommen". (Nach der

Uebersetzung von F. Lange.) — Andere erzählen etwas abweichend, daß die Geometrie durch das Bedürfniß entstanden sei, wenn die Ueberschwemmung des Nil die Grenzen der Ländereien unkenntlich gemacht hatte, einem Jeden seinen richtigen Theil wieder zumessen zu können. (S. d. Note zu der angeführten Stelle bei Bähr **Herodoti Halic. Musae, Ed. altera, Vol. I.**)

Die Griechen sind, so weit unsere Kunde reicht, das älteste Volk, welches die Geometrie als Wissenschaft behandelt hat. Das berühmteste von ihnen uns hinterlassene geometrische Werk sind die sogenannten Elemente des Euklides; sie wurden um das Jahr 300 vor Christi Geburt zu Alexandria geschrieben, und werden noch bis auf den heutigen Tag (vornehmlich in England) als Lehrbuch der Geometrie gebraucht. Der erste Uebersetzer der Elemente Euklid's war der Engländer Athelard von Bath, im 12. Jahrhundert nach Christi Geburt, der sie bei den Arabern kennen lernte und durch Uebertragung in's Lateinische den Völkern des Abendlandes zugängig machte.

* * *

Um sich von den Raumgrößen, welche die Geometrie als gegeben voraussetzt, eine deutliche Vorstellung zu machen, kann man einen doppelten Weg einschlagen.

Man kann 1) von dem Körper ausgehen. Alsdann ist die Fläche die Grenze eines Körpers, die Linie die Grenze einer Fläche, und der Punkt die Grenze einer Linie.

Man kann 2) von dem Punkt ausgehen. Alsdann ist die Linie der Weg, den ein in Bewegung gesetzter Punkt beschreibt; die Fläche der Weg, den eine in Bewegung gesetzte Linie beschreibt, vorausgesetzt, daß diese Linie nicht in sich selbst fortgeschoben wird; und der Körper der Weg, den eine in Bewegung gesetzte Fläche beschreibt, vorausgesetzt, daß diese Fläche nicht in sich selbst fortgeschoben wird.

Auf beiden Wegen zeigt sich, daß es außer den vier angegebenen Raumgrößen keine andere geben kann. Ferner schließt man daraus: Der Körper hat drei Dimensionen oder Ausdehnungen, nämlich Länge, Breite und Dicke, die Fläche hat zwei Dimensionen, nämlich Länge und Breite; die Linie hat eine Dimension, die Länge; und endlich der Punkt ist ohne alle Ausdehnung.

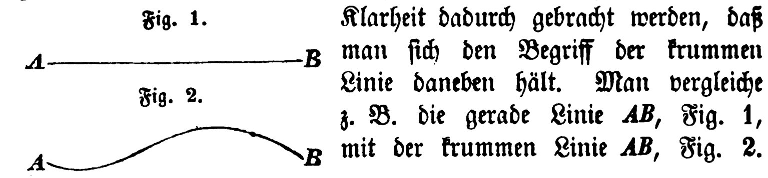
§. 2.

Erklärung. Die Linien werden eingetheilt in gerade Linien und krumme Linien.

Eine krumme Linie ist eine solche, von der kein Theil gerade ist.

Die gerade Linie ist einer strengen Erklärung nicht fähig. Euklides in seinen Elementen sagt: „Eine gerade Linie ist eine Linie, welche zwischen den in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt"; eine Erklärung, welche nach allgemeinem Zugeständnisse dunkler ist als das zu Erklärende. Verwandt mit ihr ist die Erklärung: „Eine gerade Linie ist eine Linie, deren Theile sämmtlich in einerlei Richtung liegen". Archimedes in dem Buche über die Kugel sagt: „Ich nehme an und setze als bekannt voraus, daß unter allen Linien, welche einerlei Endpunkte haben, die gerade Linie die kürzeste sei"; und daraus hat man die Erklärung gemacht: „Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten". Alle diese Erklärungen aber haben den gemeinschaftlichen Fehler, daß sie nur ein einzelnes Merkmal der geraden Linie angeben, ohne damit den Begriff der geraden Linie zu erschöpfen.

Dieser Mangel ist indessen nur mehr ein Mangel der Form, als dem Wesen nach. Der Begriff der geraden Linie ist einfach genug und jedermann klar; auch kann er nöthigenfalls zur vollen Klarheit dadurch gebracht werden, daß man sich den Begriff der krummen Linie daneben hält. Man vergleiche z. B. die gerade Linie AB, Fig. 1, mit der krummen Linie AB, Fig. 2.



Anmerkung. Einen aus mehreren geraden Linien zusammengesetzten Zug nennt man zuweilen eine gebrochene Linie, so wie einen aus geraden und krummen Linien zusammengesetzten Zug eine gemischte Linie.

§. 3.

Erklärung. Die Flächen werden eingetheilt in ebene Flächen (Ebenen) und krumme Flächen.

Eine krumme Fläche ist eine solche, von der kein Theil eben ist.

Die ebene Fläche ist eben so wenig wie die gerade Linie einer

strengen Erklärung fähig. Euklides sagt: „Eine Ebene ist eine Fläche, welche zwischen den in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt". Eine andere Erklärung, welche auch schon die Griechen anführen, lautet: „Eine Ebene ist eine Fläche, in welche man nach allen Richtungen gerade Linien legen kann". Von diesen Erklärungen gilt dasselbe, was von den Erklärungen der geraden Linie im vorigen Paragraph gesagt worden ist.

§. 4.

Erklärung. **Construiren heißt: Gegebene Raumgrößen zu einer vorgeschriebenen Verbindung zusammenstellen.**

Das Ergebniß einer Construction führt den Namen Figur, im allgemeinsten Sinne des Wortes.

So z. B. construirt man einen Winkel, einen Kreis, eine Kugel 2c., und der Winkel, der Kreis, die Kugel 2c. sind Figuren, im weiteren Sinne dieses Wortes.

Im engeren Sinne gebraucht man das Wort Figur nur von den geschlossenen Figuren (s. §. 44).

§. 5.

Erklärung. **Die Geometrie wird eingetheilt in die Planimetrie und die Stereometrie.**

Die Planimetrie beschäftigt sich nur mit Constructionen, welche in einer Ebene ausgeführt werden können.

Die Stereometrie dagegen beschäftigt sich mit Constructionen, welche nicht in einer Ebene ausgeführt werden können.

Die Planimetrie, welche von der Ebene ihren Namen hat, construirt demnach nur mit Punkten und Linien. Die Stereometrie aber construirt mit Punkten, Linien, Flächen und Körpern, und hat von den Körpern als ihrem Hauptgegenstande ihren Namen erhalten.

§. 6.

Forderungssatz. **Durch einen gegebenen Punkt in einer gegebenen Ebene eine gerade Linie in diese Ebene zu legen, und dieselbe um einen in ihr angenommenen festen Punkt beliebig in dieser Ebene zu drehen.**

Die beiden Forderungen, welche in diesem Satze ausgesprochen sind, bilden die Grundlage für alle Constructionen der Planimetrie. In den planimetrischen Zeichnungen gebraucht man zur Ausführung dieser Forderungen das Lineal und den Zirkel.

Erster Abschnitt.

Construction aus zwei geraden Linien.

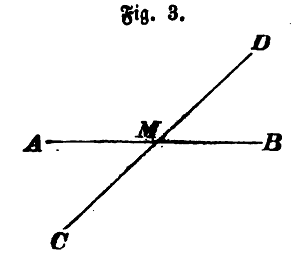
---

§. 7.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien einen Punkt mit einander gemein haben, so sagt man, sie **durchschneiden** einander in diesem Punkte.

Der gemeinschaftliche Punkt heißt ihr **Durchschnittspunkt**

Fig. 3.



Z. B. die beiden geraden Linien *AB* und *CD*, Fig. 3, durchschneiden einander im Punkte *M*, und dieser Punkt *M* ist ihr Durchschnittspunkt.

Die gegebenen geraden Linien müssen hier fortwährend als unbegrenzt lang gedacht werden, so lange nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

§. 8.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien ihrer ganzen Erstreckung nach zusammenfallen, so sagt man, sie **decken einander**.

Wenn man eine der beiden geraden Linien *AB* und *CD*, Fig. 3,

um den Durchschnittspunkt *M*, als festen Punkt, hinreichend drehet, so wird man leicht den Fall hervorbringen, wo eine Deckung der beiden geraden Linien eintritt.

§. 9.

Grundsatz. Jede zwei gerade Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, decken einander.

Man spricht diesen Grundsatz auch so aus: Zwischen zwei gegebenen Punkten kann nur Eine gerade Linie gezogen werden. Das heißt aber nichts anderes als: Jede andere gerade Linie, welche man durch dieselben zwei gegebenen Punkte legen mag, muß nothwendig mit der ersten zusammenfallen.

Dieser Satz kann nicht bewiesen werden, weil noch keine vorausgegangenen Sätze da sind, auf welche der Beweis sich stützen könnte.

Anmerkung. Aus dem vorstehenden Satze kann man ein praktisches Verfahren ableiten, um die Richtigkeit eines Lineals zu prüfen, welches zum Zeichnen gerader Linien verwandt werden soll. Wenn man nämlich längs der Kante des Lineals auf einer ebenen Fläche eine Linie zieht, und darauf dieselbe Kante des Lineals auf der entgegengesetzten Seite der gezogenen Linie so an diese Linie legt, daß sie zwei Punkte mit derselben gemein hat, so muß die Kante ihrer ganzen Erstreckung nach mit der gezogenen Linie zusammenfallen. Trifft diese Probe nicht zu, so ist das Lineal zum Zeichnen gerader Linien unbrauchbar, und muß berichtigt werden.

§. 10.

Erklärung. Zwei begrenzte gerade Linien werden gleich lang genannt, wenn sie so aufeinander gelegt werden können, daß ihre Endpunkte gegenseitig zusammenfallen.

Im entgegengesetzten Falle ist die eine der beiden Linien die größere und die andere die kleinere.

Die hier angezeigte Untersuchung, ob zwei gegebene begrenzte gerade Linien gleich lang sind oder nicht, wird in den planimetrischen Zeichnungen durch den Zirkel oder durch Anlegung eines

Maßstabes ausgeführt. Ueberhaupt beruht auf ihr alles Messen gerader Linien, wovon unten weiter die Rede sein wird.

§. 11.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien, so weit sie auch verlängert werden mögen, keinen Punkt mit einander gemein haben, so werden sie parallel genannt.

Z. B. wenn man zu einer gegebenen geraden Linie *AB*, Fig. 4, durch einen gegebenen Punkt *N* sich eine zweite gerade Linie *CD* so gelegt denkt, daß beide Linien niemals zusammentreffen, so weit man sie auch verlängern mag, so sind diese Linien parallel.

Fig. 4.

Das Wort „parallel" ist aus der griechischen Sprache genommen und bedeutet „neben einander". Im Deutschen gebraucht man dafür auch das Wort „gleichlaufend".

Man schreibt $AB \parallel CD$.

§. 12.

Grundsatz. Zu einer gegebenen geraden Linie kann durch einen gegebenen Punkt nur Eine Parallele gelegt werden.

Oder wenn man in Fig. 4, wo $AB \parallel CD$ vorausgesetzt wird, die gerade Linie *CD* um den in ihr enthaltenen Punkt *N* nur um ein Geringes drehet, so wird sie nothwendig die andere gerade Linie *AB* schneiden, sobald man nur beide Linien hinreichend verlängert.

Dieser Satz kann nicht bewiesen werden. Zwar ist im §. 9 schon ein Satz vorhergegangen, auf welchen der Beweis gestützt werden könnte, und man sollte deshalb, streng genommen, hier einen Beweis erwarten, wodurch der vorstehende Satz aus einem Grundsatze sich in einen Lehrsatz verwandeln würde. Es muß aber offen eingestanden werden, daß ein solcher Beweis sich nicht geben läßt. So lange eine Geometrie als Wissenschaft existirt, hat auch der Begriff der parallelen Linien immer einen eigenthümlichen Grundsatz nöthig gemacht. Andere haben diesen Grundsatz unter anderer Gestalt gegeben; aber alle Versuche, einen Grundsatz zu vermeiden, sind bis jetzt vergeblich gewesen, so oft auch seit den Zeiten Euklid's

solche Versuche sich wiederholt haben. Die Planimetrie bedarf demnach zu ihrer Begründung zweier Grundsätze.

Eine ähnliche Erscheinung wiederholt sich in der Grundlegung der Stereometrie.

Anmerkung. Unter den zahlreichen Versuchen, die Lehre von den Parallelen ohne einen ihr eigenthümlichen Grundsatz zu begründen, darf als der gelungenste wohl derjenige von Bertrand angesehen werden, welchen dieser in einem im Jahre 1778 zu Genf erschienenen Werke: **Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques** mittheilt (s. Mager's pädagogische Revue, Bd. X. Seite 489). In Klügel's mathemat. Wörterbuch wird diese Erfindung dem Hofprediger Schulz in Königsberg zugeschrieben, welcher sie 1784 veröffentlichte. Einen anderen Versuch, welchen Montucla in seiner **Histoire des Mathématiques** als den vorzüglichsten rühmt, hat der persische Mathematiker Nassir-Eddin, welcher um das Jahr 1260 nach C. G. der Sternwarte zu Meragha vorstand, in einem arabisch geschriebenen Commentar über den Euklides gegeben. Doch darf man, nach dem zu urtheilen, was Kästner in seiner Geschichte der Mathematik davon mittheilt, sich nicht zuviel von diesem Versuche versprechen.

§. 13.

Erklärung. Von zwei geraden Linien, welche gehörig verlängert in einem Punkte zusammentreffen, sagt man, sie convergiren nach diesem Punkte hin, und sie divergiren nach der entgegengesetzten Richtung.

Z. B. die beiden geraden Linien AB und CD, Fig. 5, welche über B und D hinaus hinreichend verlängert sich in einem gewissen außerhalb der Zeichnung liegenden Punkte treffen, convergiren nach B und D hin, und sie divergiren nach A und C hin.

Fig. 5.

Wird die Verlängerung der beiden Linien wirklich ausgeführt, so hat man wieder den Fall §. 7.

Der Winkel.

§. 14.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche von einem Punkte aus unbegrenzt fortgeht, wird ein Strahl genannt.

Der Ausgangspunkt mehrerer Strahlen heißt ein Strahlenpunkt.

So stellt z. B. die Fig. 3, §. 7, vier Strahlen dar, *MA*, *MB*, *MC* und *MD*, welche von dem Punkte *M*, als Strahlenpunkt, ausgehen.

§. 15.

Erklärung. Wenn von einem Punkte zwei Strahlen ausgehen, so wird der durch diese Strahlen begrenzte Theil der Ebene ein Winkel genannt.

Die beiden Strahlen heißen die Schenkel des Winkels, der Strahlenpunkt der Scheitelpunkt des Winkels, und der begrenzte Theil der Ebene selbst wird, im Gegensatz gegen seine Begrenzung, die Winkelfläche genannt.

Z. B. in dem Winkel, welchen Fig. 6 darstellt, sind *AB* und *AC* die beiden Schenkel des Winkels, der Punkt *A* ist der Scheitelpunkt des Winkels, und der durch Schraffirung bedeckte Theil der Ebene, in welchem der Buchstabe x steht, ist die Winkelfläche dieses Winkels.

Fig. 6.

C A B

Im Schreiben bezeichnet man diesen Winkel durch $\angle BAC$ oder $\angle CAB$, wo der am Scheitelpunkt stehende Buchstabe *A* immer in die Mitte gestellt werden muß; oder auch kürzer durch $\angle x$.

Anmerkung. Euklides erklärt den Winkel als die Neigung zweier geraden Linien; Andere erklären ihn als den Richtungsunterschied zweier geraden Linien. Doch ist weder die Neigung, noch der Richtungsunterschied ein hinreichend deutlicher Begriff, vielmehr wird ein solcher erst durch Zuziehung der zwischen den Schenkeln enthaltenen Winkelfläche, wie oben geschehen, zu Stande gebracht.

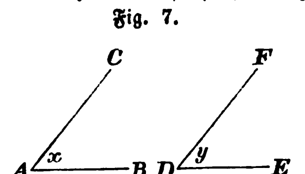
§. 16.

Erklärung. Zwei Winkel werden gleich groß genannt, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sie in ihrer ganzen Ausdehung zusammenfallen.

Im entgegengesetzten Falle ist der eine Winkel der größere und der andere der kleinere.

Um zu untersuchen, ob zwei gegebene Winkel x und y, Fig. 7, gleich groß sind, verfahre man auf folgende Weise. Man lege die beiden Winkel mit ihren Winkelflächen so auf einander, daß der Scheitelpunkt D des Winkels y auf den Scheitelpunkt A des Winkels x, und zugleich der Schenkel DE des Winkels y auf den Schenkel AB des Winkels x fällt. Wenn alsdann auch der zweite Schenkel DF des Winkels y mit dem zweiten Schenkel AC des Winkels x zusammenfällt, so decken beide Winkel einander und es ist $\angle x = \angle y$.

Fig. 7.



§. 17.

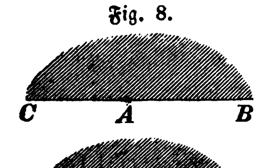
Erklärung. Ein Winkel, dessen zwei Schenkel eine unbegrenzte gerade Linie bilden, wird ein gerader Winkel genannt.

Ein hohler (concaver) Winkel ist kleiner als ein gerader. Ein erhabener (convexer) Winkel ist größer als ein gerader.

§. 18.

Lehrsatz. Alle geraden Winkel sind gleich groß.

Fig. 8.



Voraussetzung:
$\angle CAB$ und $\angle FDE$ sind gerade Winkel.

Folgerung:
$\angle CAB = \angle FDE.$

Beweis. Man lege $\angle FDE$ so auf $\angle CAB$, daß der Scheitelpunkt D auf den Scheitelpunkt A, und der Schenkel DE auf den Schenkel AB fällt. Alsdann muß, nach dem Grundsatze §. 9, auch

der Schenkel *DF* auf den Schenkel *AC* fallen. Folglich sind, nach der Erklärung §. 16, die beiden Winkel *CAB* und *FDE* gleich groß, was zu beweisen war.

§. 19.

Erklärung. Zwei hohle Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben und deren andere Schenkel eine unbegrenzte gerade Linie bilden, werden Nebenwinkel genannt.

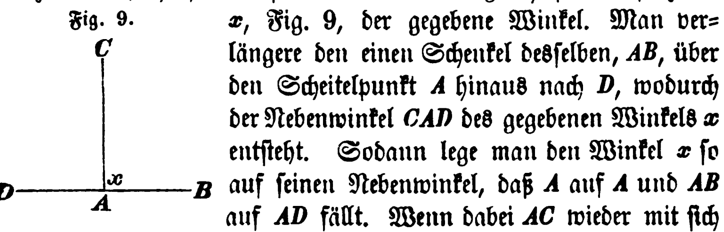
§. 20.

Erklärung. Ein Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist, heißt ein rechter Winkel.

Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein rechter. Ein stumpfer Winkel ist größer als ein rechter und zugleich kleiner als ein gerader Winkel. Spitze und stumpfe Winkel werden mit einem gemeinschaftlichen Namen schiefe Winkel genannt.

Unter einem Perpendikel versteht man eine gerade Linie, welche eine andere rechtwinkelig schneidet, und unter einer geneigten Linie versteht man eine gerade Linie, welche eine andere schiefwinkelig schneidet.

Um zu untersuchen, ob ein gegebener Winkel ein rechter sei, hat man zu untersuchen, ob er seinem Nebenwinkel gleich ist. Es sei z. B. x, Fig. 9, der gegebene Winkel. Man verlängere den einen Schenkel desselben, *AB*, über den Scheitelpunkt *A* hinaus nach *D*, wodurch der Nebenwinkel *CAD* des gegebenen Winkels x entsteht. Sodann lege man den Winkel x so auf seinen Nebenwinkel, daß *A* auf *A* und *AB* auf *AD* fällt. Wenn dabei *AC* wieder mit sich selbst zusammenfällt, so ist der Winkel x seinem Nebenwinkel gleich, folglich nach der vorstehenden Erklärung ein rechter Winkel.



Man schreibt abgekürzt $\angle x = R$. Auch $AC \perp BD$.

Anmerkung. Von dem hier angezeigten Verfahren kann man eine praktische Anwendung machen, um die Richtigkeit des hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks zu prüfen, welches zum Zeichnen rechter Winkel gebraucht werden soll.

§. 21.

Lehrsatz. Alle rechten Winkel sind gleich groß.

Beweis. Nach dem Lehrsatze §. 18 sind alle geraden Winkel gleich groß. Nach der Erklärung §. 20 aber ist jeder rechte Winkel die Hälfte eines geraden Winkels. Folglich sind auch alle rechten Winkel, als Hälften gleich großer Winkel, gleich groß, was zu beweisen war.

§. 22.

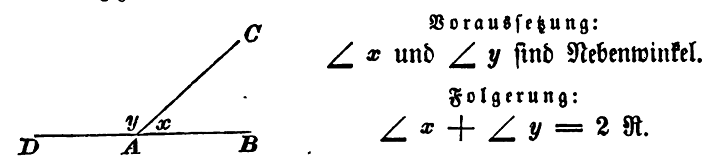
Zusatz. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen geraden Linie ist nur Ein Perpendikel auf dieser geraden Linie möglich.

So kann z. B. auf der geraden Linie *DB*, Fig. 9, außer dem Perpendikel *AC* (mit Einschluß seiner Verlängerung über *A* hinaus) kein zweites Perpendikel in demselben Punkte *A* errichtet werden.

§. 23.

Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 10.



Voraussetzung:

$\angle x$ und $\angle y$ sind Nebenwinkel.

Folgerung:

$\angle x + \angle y = 2$ R.

Beweis. Die beiden Nebenwinkel *x* und *y* machen, nach der Erklärung §. 19, zusammen einen geraden Winkel aus. Aber ein gerader Winkel ist, nach der Erklärung §. 20, der Summe von zwei rechten Winkeln gleich. Folglich ist auch die Summe der beiden Nebenwinkel *x* und *y* der Summe von zwei rechten Winkeln gleich, was zu beweisen war.

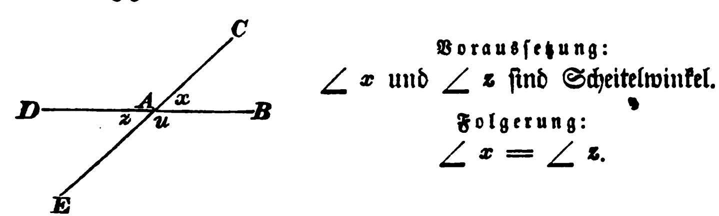
§. 24.

Erklärung. Zwei hohle Winkel von solcher Lage, daß die Schenkel des einen Winkels die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind, werden Scheitelwinkel genannt.

§. 25.

Lehrsatz. Jede zwei Scheitelwinkel sind gleich groß.

Fig. 11.



Voraussetzung:
$\angle x$ und $\angle z$ sind Scheitelwinkel.

Folgerung:
$\angle x = \angle z$.

Beweis. Man nehme einen dritten Winkel, $\angle u$, zu Hülfe. Dann hat man nach §. 23

$$\angle x + \angle u = 2 \text{ R}.$$
$$\angle z + \angle u = 2 \text{ R}.$$

Da nun, wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, diese auch einander gleich sein müssen, so folgt weiter

$$\angle x + \angle u = \angle z + \angle u.$$

Und wenn man von diesen beiden gleichen Summen den gleichen Bestandtheil $\angle u$ subtrahirt, so muß Gleiches übrig bleiben, also

$$\angle x = \angle z,$$

was zu beweisen war.

Der Kreis.

§. 26.

Erklärung. Der Kreis ist eine Linie, deren sämmtliche Punkte von einem gewissen festen Punkte, welcher der Mittelpunkt heißt, gleichen Abstand haben.

Wenn man den Kreis seiner ganzen Erstreckung nach bezeichnen will, so nennt man ihn Kreis=Umfang oder Kreis=Peripherie. Jeder durch zwei Punkte begrenzte Theil des Kreises dagegen heißt ein Kreisbogen.

Unter dem Halbmesser oder Radius eines Kreises versteht man eine begrenzte gerade Linie, welche den Mittelpunkt mit irgend einem Punkte der Peripherie verbindet. Unter dem Durchmesser oder Diameter eines Kreises versteht man eine begrenzte gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der Peripherie mit einander verbindet.

Der Kreis ist eine krumme Linie, und zwar die einzige krumme Linie, welche in der Elementar-Geometrie betrachtet wird.

Man bezeichnet das Wort Kreis abgekürzt durch ○.

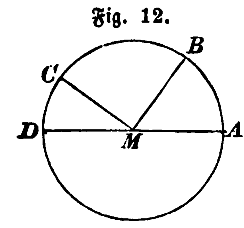
§. 27.

Zusatz. Alle Halbmesser, so wie alle Durchmesser eines Kreises sind gleich lang.

§. 28.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte, als Mittelpunkt, mit einer gegebenen geraden Linie, als Halbmesser, einen Kreis zu construiren.

Fig. 12.



Gegeben:
M als Mittelpunkt,
MA als Halbmesser.

Gesucht:
○ aus *M* mit *MA*.

Construction. Man drehe die gerade Linie *MA* um den festen Endpunkt *M*, so daß sie nach und nach die Lagen *MB*, *MC*, *MD*, 2c. annimmt, bis dahin, wo sie wieder in ihre anfängliche Lage *MA* gelangt. Der Weg, welchen dabei der andere Endpunkt *A* der geraden Linie *MA* beschreibt, ist der gesuchte Kreis.

In den planimetrischen Zeichnungen wird diese Construction mit Hülfe des Zirkels ausgeführt.

Die geraden Linien *MA*, *MB*, *MC*, 2c. sind Halbmesser des entstandenen Kreises. Die gerade Linie *AD*, welche durch den Mittelpunkt *M* des Kreises geht, ist ein Durchmesser des Kreises.

Die Abschnitte *AB*, *BC*, *CD* sind Kreisbögen.

§. 29.

Zusatz. Wenn zwei oder mehrere gegebene Punkte von einem gewissen festen Punkte gleiche Abstände haben, so läßt sich durch jene Punkte eine Kreis-Peripherie legen, von welcher dieser feste Punkt der Mittelpunkt ist.

Z. B. wenn die Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, Fig. 12, gegeben sind, welche von dem festen Punkte *M* gleiche Abstände $MA = MB = MC = MD$

haben, so kann man aus diesem Punkte *M*, als Mittelpunkt, einen Kreis construiren, welcher zugleich durch alle die gegebenen Punkte *A*, *B*, *C*, *D* geht.

§. 30.

Erklärung. **Zwei Kreisbögen eines Kreises werden gleich lang genannt, wenn sie ihrer ganzen Ausdehnung nach so auf einander gelegt werden können, daß auch ihre Endpunkte gegenseitig zusammenfallen.**

Im entgegengesetzten Falle ist der eine Kreisbogen der größere und der andere der kleinere.

§. 31.

Erklärung. **Jede Kreis-Peripherie wird in 360 gleiche Theile getheilt und ein solcher Theil ein Grad genannt. Den Grad theilt man weiter in 60 Minuten, und die Minute in 60 Secunden.**

Man schreibt: Grad (°), Minuten ('), Secunden (''). So hat der Halbkreis 180°, der Viertelkreis oder Quadrant 90° ꝛc.

Diese Eintheilung der Kreis-Peripherie ist uralt, und findet sich schon bei den Chaldäern und den Aegyptern, vor der Zeit der Griechen. Ihre Entstehung hängt vermuthlich mit der Länge des Sonnenjahrs zusammen, welche in den ältesten Zeiten nur ungenau bekannt sein konnte. Nimmt man nämlich, wie bei den alten Aegyptern, vor dem Einfalle der Hyksos, die Dauer des Jahres zu 360 Tagen an, und setzt überdies voraus, daß die Sonne sich gleichförmig im Aequator fortbewege, so beträgt der Weg, um welchen die Sonne von einem Tage zum andern fortrückt, genau den 360sten Theil des Kreis-Umfangs, oder einen Grad (**gradus**, Schritt). In der Wirklichkeit ist aber der scheinbare tägliche Weg der Sonne bald etwas größer, bald etwas geringer als ein Grad.

In der französischen Revolution wurde eine neue Eintheilung des Kreises vorgenommen, indem man die Kreis-Peripherie zu 400 oder den Quadranten zu 100 Graden, den Grad zu 100 Minuten, und die Minute zu 100 Secunden annahm. Man findet diese Eintheilung noch in Werken jener Zeit; sie ist aber niemals vollständig in den Gebrauch gekommen.

Die Wörter: Minute und Secunde sind entstanden aus **minuta**

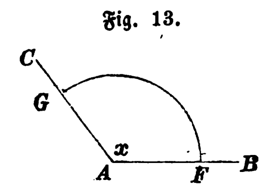
prima und minuta secunda, sc. pars, und werden bekanntlich auch bei den Unterabtheilungen der Zeit gebraucht.

§. 32.

Erklärung. Ein Winkel wird gemessen, indem man aus seinem Scheitelpunkt, als Mittelpunkt, zwischen seinen Schenkeln mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen construirt, und die Länge dieses Kreisbogens in Graden, Minuten und Secunden ausdrückt.

Z. B. um den Winkel *BAC* oder *x*, Fig. 13, zu messen, construire man aus dem Scheitelpunkte *A* zwischen den Schenkeln dieses Winkels mit einem beliebigen Halbmesser *AF* einen Kreisbogen *FG*. Die Anzahl Grade, Minuten und Secunden, welche dieser Kreisbogen *FG* enthält, giebt die Größe des Winkels *BAC* oder *x* an.

Fig. 13.



So hat der gerade Winkel gleich wie der Halbkreis 180°; der rechte Winkel gleich wie der Quadrant 90°; der Winkel, welchen die beiden Zeiger einer Taschenuhr 23 Minuten nach 12 Uhr mit einander einschließen, beträgt 126° 30′; ꝛc.

Man vergleiche §. 171 Anm.

Die Messung der Winkel durch Kreisbögen soll zuerst Thales um das Jahr 600 vor Christi Geburt eingeführt haben.

Zweiter Abschnitt.

Von den Parallelen.

---

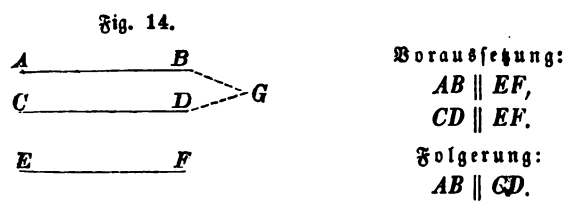
§. 33.

Lehrsatz*). Wenn zwei gerade Linien einer dritten parallel sind, so sind sie auch einander parallel.

---

*) Hier sind zuvor die §§. 11 und 12 zu wiederholen.

Fig. 14.



Voraussetzung:
$AB \parallel EF$,
$CD \parallel EF$.

Folgerung:
$AB \parallel CD$.

Beweis. Man muß nachweisen, daß die beiden geraden Linien *AB* und *CD*, so weit sie auch verlängert werden mögen, keinen Punkt mit einander gemein haben (§. 11). Dieses geschieht indirect wie folgt:

Gesetzt die beiden geraden Linien *AB* und *CD* träfen hinreichend verlängert in einem Punkte *G* zusammen. Alsdann würden durch Einen Punkt, *G*, zwei gerade Linien *AB* und *CD* gehen, welche beide (nach der Voraussetzung) mit einer und derselben geraden Linie *EF* parallel wären. Dies widerstreitet aber dem Grundsatz §. 12.

Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn die beiden geraden Linien *AB* und *CD* keinen Punkt mit einander gemein haben; d. h. sie sind parallel, w. z. b. w.

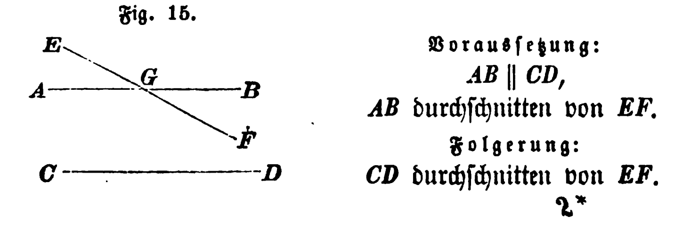
Anmerkung. Unter einem indirecten oder apagogischen Beweise versteht man einen Beweis, in welchem gezeigt wird, daß die Annahme, der zu beweisende Satz sei unwahr, auf einen Widerspruch führt. Damit dieser Widerspruch aufgehoben werde, folgt sodann die Wahrheit des zu beweisenden Satzes von selbst.

Ein indirecter Beweis kann immer mit den Worten angefangen werden: Gesetzt, der zu beweisende Satz sei unwahr ꝛc.

§. 34.

Lehrsatz. Wenn eine von zwei Parallelen von einer dritten geraden Linie durchschnitten wird, so wird auch die andere Parallele von dieser dritten geraden Linie durchschnitten.

Fig. 15.



Voraussetzung:
$AB \parallel CD$,
AB durchschnitten von *EF*.

Folgerung:
CD durchschnitten von *EF*.

Beweis. Man kann wieder indirect beweisen wie folgt:

Gesetzt die gerade Linie *CD* werde nicht von *EF* durchschnitten, so weit man auch beide verlängern mag. Alsdann müßte *EF* || *CD* sein (§. 11). Also würden durch Einen Punkt, *G*, zwei gerade Linien, *AB* und *EF*, gehen, welche beide mit einer und derselben geraden Linie *CD* parallel wären. Dies widerstreitet aber dem Grundsatze §. 12.

Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn *CD* und *EF* einander schneiden, w. z. b. w.

§. 35.

Erklärung. **Eine gerade Linie, welche zwei oder mehrere andere gerade Linien durchschneidet, wird eine Transversale dieser geraden Linien genannt.**

So ist, in Folge des vorigen Lehrsatzes, die gerade Linie *EF*, Fig. 15, eine Transversale der beiden geraden Linien *AB* und *CD*.

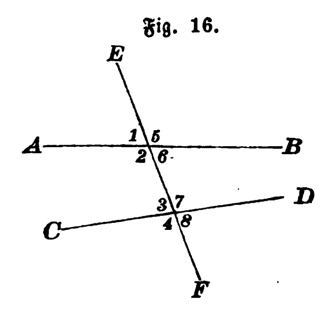
§. 36.

Erklärung. **Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale geschnitten werden, so werden gewisse Winkelpaare, von denen der eine Winkel an dem einen Durchschnittspunkte und der andere Winkel an dem anderen Durchschnittspunkte seinen Scheitelpunkt hat, mit eigenen Namen benannt. Nämlich:**

Wechselwinkel sind Winkel, welche zwischen den beiden geraden Linien und an verschiedenen Seiten der Transversale liegen.

Gegenwinkel sind Winkel, welche an einerlei Seite der Transversale, der eine zwischen und der andere außerhalb der beiden geraden Linien liegen.

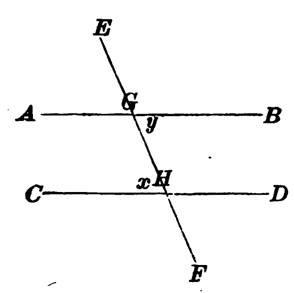
Innenwinkel sind Winkel, welche zwischen den beiden geraden Linien und an einerlei Seite der Transversale liegen.



z. B. in Fig. 16, wo die Transversale *EF* die beiden geraden Linien *AB* und *CD* schneidet, sind Wechselwinkel die Winkel 2 und 7, ebenso 3 und 6. Ferner Gegenwinkel die Winkel 1 und 3, 2 und 4, 5 und 7, 6 und 8. Endlich Innenwinkel die Winkel 2 und 3, und ebenso 6 und 7.

§. 37.

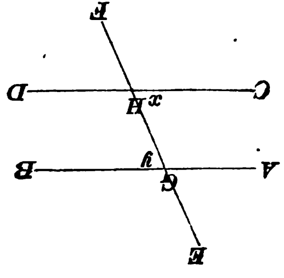
Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel gleich groß sind, so sind die beiden geraden Linien parallel.



Voraussetzung:
$\angle x = \angle y$.

Folgerung:
$AB \parallel CD$.

Beweis. 1) Man denke sich die Fig. 17 erstens von ihrer Stelle gehoben, zweitens umgedrehet (so wie es die nebenstehende Figur zeigt), und endlich drittens so wieder niedergelegt, daß der Punkt *H* der zweiten Figur auf *G* der ersten, und der Punkt *G* der zweiten Figur auf *H* der ersten fällt. Sodann fällt die Transversale *FE* der zweiten Figur mit der Transversale *EF* der ersten Figur ihrer ganzen Erstreckung nach zusammen (§. 9). Ferner fällt $\angle x$ der zweiten Figur auf $\angle y$ der ersten Figur, da beide nach der Voraussetzung gleich groß sind; folglich auch die gerade

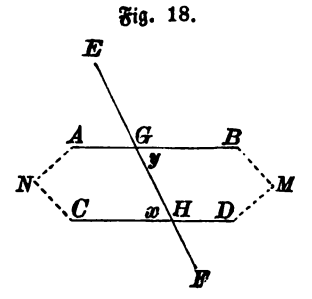


Linie *DC* der zweiten Figur auf die gerade Linie *AB* der ersten. Endlich fällt, aus demselben Grunde, $\angle y$ der zweiten Figur auf $\angle x$ der ersten; folglich auch die gerade Linie *BA* der zweiten Figur auf die gerade Linie *CD* der ersten. Kurz, die gegebene Figur kann, vermöge der Voraussetzung $\angle x = \angle y$, in umgekehrter Lage mit sich selbst zur Deckung gebracht werden.

2) Nachdem dies feststeht, kann der übrige Theil des Beweises indirect geführt werden wie folgt:

Gesetzt die beiden geraden Linien *AB* und *CD* seien nicht parallel, sondern treffen sich z. B. über *B* und *D* hinaus in einem Punkte *M*, Figur 18. Alsdann müßte, weil nach dem Vorigen die Figur in umgekehrter Lage mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann, auch über *A* und *C* hinaus ein Punkt *N* existiren, in welchem dieselben beiden geraden Linien, hinreichend verlängert, zusammentreffen würden. Die beiden geraden Linien *AB* und *CD* hätten also zwei Punkte, *M* und *N*, miteinander gemein, ohne selbst zusammenzufallen. Dies widerspricht aber dem Grundsatze §. 9.

Fig. 18.

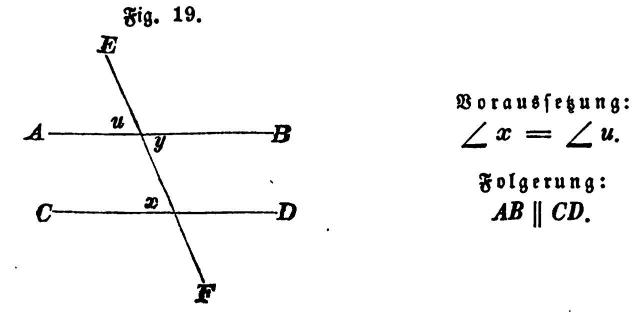


Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn die beiden geraden Linien *AB* und *CD* keinen Punkt mit einander gemein haben, so weit man sie auch verlängern mag; d. h. sie sind parallel, w. z. b. w.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Gegenwinkel gleich groß sind, so sind die beiden geraden Linien parallel.

Fig. 19.



Voraussetzung:
$\angle x = \angle u$.

Folgerung:
$AB \parallel CD$.

Beweis. Man nehme den Wechselwinkel von x, nämlich $\angle y$, zu Hülfe. Alsdann ist nach dem Lehrsatze §. 25

$$\angle y = \angle u.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$\angle x = \angle u.$$

Und da, wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, beide auch unter einander gleich sein müssen, so folgt

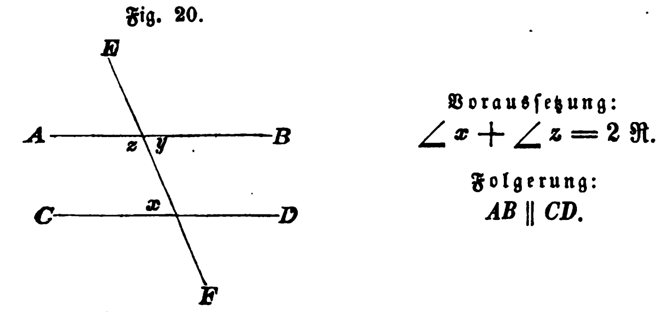
$$\angle x = \angle y.$$

Hieraus aber folgt nach dem Lehrsatze §. 37, daß die beiden geraden Linien AB und CD parallel sind, w. z. b. w.

§. 39.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Summe der Innenwinkel zwei Rechte beträgt, so sind die beiden geraden Linien parallel.

Fig. 20.



Voraussetzung:
$\angle x + \angle z = 2$ R.

Folgerung:
$AB \parallel CD$.

Beweis. Man nehme den Wechselwinkel von x, nämlich $\angle y$, zu Hülfe. Alsdann ist nach dem Lehrsatze §. 23

$$\angle y + \angle z = 2 \text{ R}.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$\angle x + \angle z = 2 \text{ R}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$\angle x + \angle z = \angle y + \angle z,$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung den gleichen Winkel z subtrahirt,

$$\angle x = \angle y.$$

Hieraus aber folgt nach dem Lehrsatze §. 37, daß die beiden geraden Linien AB und CD parallel sind, w. z. b. w.

§. 40.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen von einer Transversale durchschnitten werden, so sind jede zwei Wechselwinkel gleich groß.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 37).

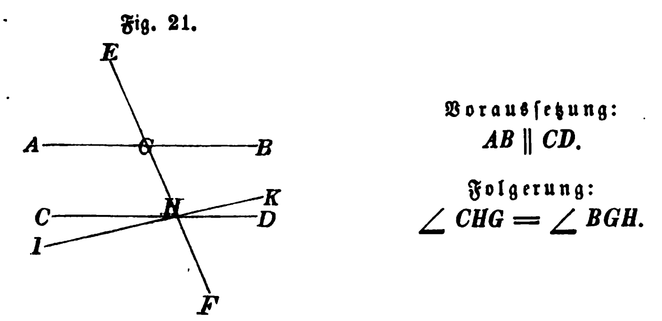


Fig. 21.

Voraussetzung:
AB || *CD*.

Folgerung:
$\angle CHG = \angle BGH$.

Beweis. Gesetzt die Wechselwinkel *CHG* und *BGH* seien nicht gleich groß, so könnte z. B. erstens $\angle CHG$ kleiner als $\angle BGH$ sein. Alsdann könnte man den Winkel *CHG* um einen Winkel *CHI* vergrößern, so daß die Summe beider, oder $\angle IHG$, so groß wie $\angle BGH$ würde. Aus der Gleichheit der Wechselwinkel *IHG* und *BGH* folgt ferner nach dem Lehrsatze §. 37, daß *AB* || *IK* ist. Nach der Voraussetzung ist aber zugleich *AB* || *CD*. Also hat man zwei durch einen Punkt *H* gehende gerade Linien, welche beide parallel mit *AB* sind, und dies widerspricht dem Grundsatze §. 12.

Wenn zweitens $\angle CHG$ größer als $\angle BGH$ wäre, so würde man durch ähnliche Schlüsse gleichfalls zu einem Widerspruche mit demselben Grundsatze §. 12 gelangen.

Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn $\angle CHG = \angle BGH$ ist, w. z. b. w.

Anmerkung. Unter der Umkehrung eines Lehrsatzes versteht man einen Satz, welcher die Voraussetzung des ersten als Folgerung, und die Folgerung des ersten als Voraussetzung enthält. So war in dem Lehrsatze §. 37 die Voraussetzung: „Die Wechselwinkel sind gleich", und daraus wurde die Folgerung nachgewiesen: „Die geraden Linien sind parallel". Dagegen in der Umkehrung dieses Lehrsatzes, nämlich in dem vorstehenden Lehrsatze, ist die

Voraussetzung: „Die geraden Linien sind parallel“, und daraus die Folgerung: „Die Wechselwinkel sind gleich“.

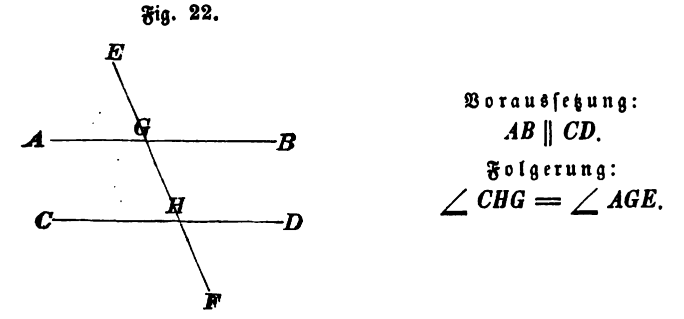
Wenn ein Satz wahr ist, so darf man ihn nicht ohne Weiteres **umkehren** und diese Umkehrung für wahr halten. Vielmehr bedarf **jede** Umkehrung immer erst einer besonderen Untersuchung, und **muß** also, wenn sie sich als zulässig herausstellt, besonders bewiesen werden. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man z. B. den **ersten** Lehrsatz der Planimetrie, §. 18, welcher in der gehörigen **Form** ausgesprochen lautet: „Wenn zwei Winkel gerade Winkel sind, so sind sie gleich groß“. Wollte man diesen Satz umkehren, so würde man erhalten: „Wenn zwei Winkel gleich groß sind, so sind sie gerade Winkel“; ein Satz, dessen Unrichtigkeit auf der Hand liegt.

§. 41.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen von einer Transversale durchschnitten werden, so sind jede zwei Gegenwinkel gleich groß.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 38.)

Fig. 22.



Voraussetzung:
$AB \parallel CD$.
Folgerung:
$\angle CHG = \angle AGE$.

Beweis. Aus dem vorigen Lehrsatze §. 40 ist schon bekannt, daß aus der Voraussetzung $AB \parallel CD$ folgt

$$\angle CHG = \angle BGH.$$

Aber nach dem Lehrsatz §. 25 ist

$$\angle AGE = \angle BGH,$$

und aus diesen beiden Gleichungen schließt man

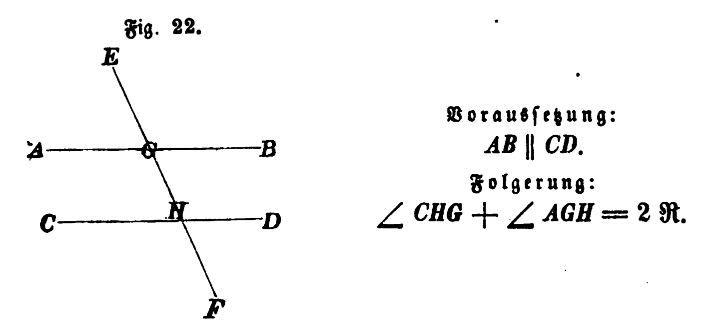
$$\angle CHG = \angle AGE,$$

w. z. b. w.

§. 42.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen von einer Transversale durchschnitten werden, so betragen jede zwei Innenwinkel zusammen zwei Rechte.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 39.)



Beweis. Aus dem Lehrsatze §. 40 ist schon bekannt, daß aus der Voraussetzung $AB \parallel CD$ folgt

$$\angle CHG = \angle BGH.$$

Wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Winkel AGH addirt, so hat man ferner

$$\angle CHG + \angle AGH = \angle BGH + \angle AGH.$$

Aber nach dem Lehrsatze §. 23 ist

$$\angle BGH + \angle AGH = 2 \text{ R},$$

und aus diesen beiden Gleichungen schließt man

$$\angle CHG + \angle AGH = 2 \text{ R},$$

w. z. b. w.

§. 43.

Zusatz. Wenn zwei gerade Linien von einer Transversale so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel ungleich sind, oder die Gegenwinkel ungleich sind, oder die Innenwinkel zusammen nicht zwei Rechte betragen, so müssen die beiden geraden Linien hinreichend verlängert einander durchschneiden.

Dieser Satz bildet den Uebergang zum Dreieck.

Dritter Abschnitt.

Vom Dreieck.

---

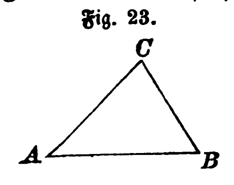
§. 44.

Erklärung. Ein Dreieck ist ein durch drei sich schneidende gerade Linien umgrenzter Theil einer Ebene.

Die Durchschnittspunkte der drei geraden Linien heißen die Eckpunkte des Dreiecks; die zwischen diesen Eckpunkten enthaltenen begrenzten geraden Linien die Seiten des Dreiecks; und die von den Seiten eingeschlossenen Winkel die Winkel des Dreiecks.

Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel, welche zusammengenommen die sechs Bestandtheile des Dreiecks genannt werden. Die drei Seiten des Dreiecks *ABC*, Fig. 23, sind *AB*, *BC*, *AC*, und seine drei Winkel sind *CAB*, *ABC*, *BCA*. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen, und eine Seite liegt ihm gegenüber. Jeder Seite liegen zwei Winkel an, und ein Winkel liegt ihr gegenüber.

Fig. 23.



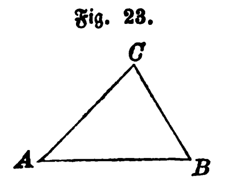
Das Dreieck ist die einfachste geschlossene Figur, d. h. diejenige, welche von der geringsten Anzahl Seiten begrenzt wird.

Man schreibt abgekürzt $\triangle$ *ABC*.

§. 45.

Lehrsatz. Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ist gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 23.



Voraussetzung:

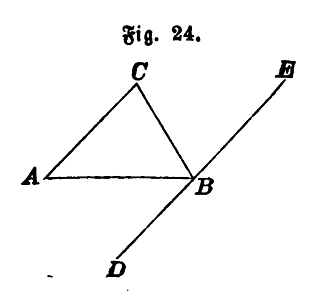
ABC ist ein Dreieck.

Folgerung:

$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 2$ R.

Erster Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 24, eine gerade Linie $DE \parallel AC$. Alsdann hat man aus §. 40, indem man AB wie Transversale ansieht

Fig. 24.



$$\angle CAB = \angle DBA.$$

Ebenso indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle EBC.$$

Bildet man endlich noch die identische Gleichung

$$\angle ABC = \angle ABC$$

und addirt diese drei Gleichungen, so erhält man als Summe

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = \angle DBA + \angle ABC + \angle EBC.$$

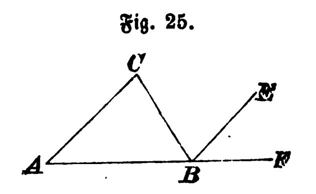
Aber die Summe $\angle DBA + \angle ABC + \angle EBC$ macht einen geraden Winkel aus, oder ist gleich 2 R; folglich muß auch

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2\ R$$

sein, w. z. b. w.

Zweiter Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 25, eine gerade Linie $BE \parallel AC$ und verlängere AB über B hinaus nach F. Alsdann hat man aus §. 41, indem man AF wie Transversale ansieht

Fig. 25.



$$\angle CAB = \angle EBF.$$

Ebenso aus §. 40 indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle EBC.$$

Bildet man endlich noch die identische Gleichung

$$\angle ABC = \angle ABC$$

und addirt diese drei Gleichungen, so findet man als Summe

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = \angle ABC + \angle EBC + \angle EBF.$$

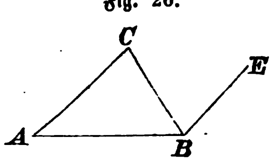
Aber die Summe $\angle ABC + \angle EBC + \angle EBF$ macht einen geraden Winkel aus, oder ist gleich 2 R; folglich muß auch

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 2\ R$$

sein, w. z. b. w.

Dritter Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 26, eine gerade Linie $BE \parallel AC$. Alsdann hat man nach §. 42, indem man AB wie Transversale ansieht

Fig. 26.



$$\angle CAB + \angle ABE = 2 R,$$

wofür man auch schreiben kann, da $\angle ABE$ aus den beiden Theilen $\angle ABC$ und $\angle CBE$ besteht

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle CBE = 2 R.$$

Ferner ist nach §. 40, indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle CBE.$$

Folglich darf man in der vorigen Gleichung $\angle ACB$ für $\angle CBE$ an die Stelle setzen, wodurch man erhält

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2 R,$$

w. z. b. w.

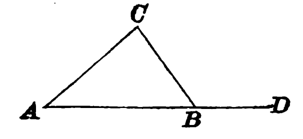
§. 46.

Erklärung. Unter einem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man einen hohlen Winkel, welcher eine Seite und die Verlängerung einer anderen Seite des Dreiecks zu Schenkeln hat.

§. 47.

Lehrsatz. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks.

Fig. 27.



Voraussetzung:
AB ist verlängert nach D.

Folgerung:
$\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB.$

Beweis. Nach dem Lehrsatze §. 45 ist

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2 R.$$

Ebenso ist nach §. 23

$$\angle ABC + \angle CBD = 2\,\Re.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle CAB + \angle ABC + \angle ACB$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Winkel ABC subtrahirt, so erhält man

$$\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Man kann diesen Lehrsatz auch vor §. 45 stellen und unabhängig von diesem Paragraph beweisen, wobei Fig. 25 zu benutzen ist. Alsdann läßt sich der Beweis von §. 45 auf diesen Lehrsatz stützen.

§. 48.

Zusatz. Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks.

So ist in der vorigen Figur

$$\angle CBD > \angle CAB$$
und $$\angle CBD > \angle ACB.$$

§. 49.

Erklärung. Man theilt die Dreiecke in Rücksicht auf ihre Winkel in 1) spitzwinkelige Dreiecke, in denen alle Winkel spitz sind; 2) rechtwinkelige Dreiecke, in denen ein Winkel ein rechter ist; und 3) stumpfwinkelige Dreiecke, in denen ein Winkel ein stumpfer ist.

Der Grund für diese Eintheilung der Dreiecke liegt in dem Lehrsatze §. 45, aus welchem man leicht schließt, daß in einem Dreiecke niemals mehr als Ein rechter oder Ein stumpfer Winkel enthalten sein kann.

§. 50.

Erklärung. Im rechtwinkeligen Dreiecke heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse des Dreiecks.

Die Benennungen Kathete und Hypotenuse sind griechischen Ursprungs. Kathete bedeutet wörtlich: herabgesenkte (d. i. senkrechte) Linie, und Hypotenuse: daruntergespannte Linie.

§. 51.

Erklärung. Man theilt die Dreiecke in Rücksicht auf ihre Seiten in 1) gleichseitige Dreiecke, in denen alle drei Seiten gleich groß sind; 2) gleichschenkelige Dreiecke, in denen zwei Seiten gleich groß sind; und 3) ungleichseitige Dreiecke, in denen die drei Seiten ungleich sind.

§. 52.

Erklärung. Im gleichschenkeligen Dreiecke heißen die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie (Basis), und der der Grundlinie gegenüberliegende Eckpunkt die Spitze des Dreiecks.

§. 53.

Erklärung. Zwei Figuren werden congruent genannt, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sie in allen ihren Bestandtheilen zusammenfallen oder einander decken.

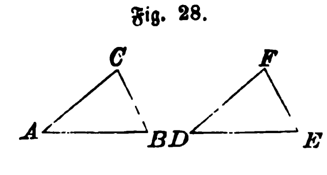
Das Wort „congruent" darf man nicht mit dem Worte „gleich" verwechseln, denn das letzte wird bei geschlossenen Figuren in der Bedeutung „inhaltsgleich" gebraucht (s. §. 113). Z. B. ein Dreieck und ein Kreis können niemals congruent sein, d. h. einander decken; aber wohl können sie einander gleich sein, d. h. gleichen Flächenraum einschließen.

Man gebraucht das Zeichen ≡ für congruent.

§. 54.

Zusatz. In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Man kann dies auch so ausdrücken: In congruenten Dreiecken sind alle gleichliegenden Bestandtheile gleich groß. Alsdann hat man unter gleichliegenden Seiten solche zu verstehen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen; und unter gleichliegenden Winkeln solche, welche gleichen Seiten gegenüberliegen.



3. B. wenn man voraussetzt, Fig. 28, daß $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ sei, d. h. daß man diese beiden Dreiecke so auf einander legen könne, daß D auf A, E auf B und F auf C fällt, so folgt daraus sogleich

$$AB = DE \quad , \quad AC = DF \quad , \quad BC = EF$$
$$\angle ACB = \angle DFE, \ \angle ABC = \angle DEF, \ \angle BAC = \angle EDF,$$

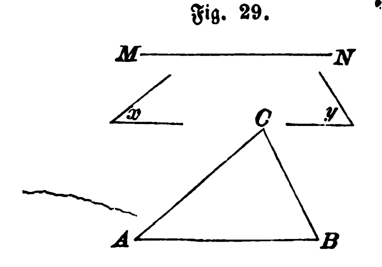
wo die einander gegenüberliegenden Bestandtheile eines Dreiecks je unter einander geschrieben sind.

Anmerkung. Euklides, welcher in seinen Elementen ein Wort für „congruent" nicht hat, umschreibt es immer in der obigen Weise, indem er sagt, alle Seiten und alle Winkel der beiden Dreiecke seien beziehungsweise gleich groß.

Erste Dreiecks-Construction.

§. 55.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln ein Dreieck zu construiren.



Gegeben:
MN als Seite,
$\angle x$ als anliegender Winkel,
$\angle y$ als anliegender Winkel.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang wie die gegebene MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ebenso lege man im Punkte B, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie BA, als Schenkel, einen Winkel ABC gleich dem gegebenen $\angle y$. Verlängert man

endlich die Schenkel dieser beiden Winkel bis zu ihrem Durchschnittspunkte C, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

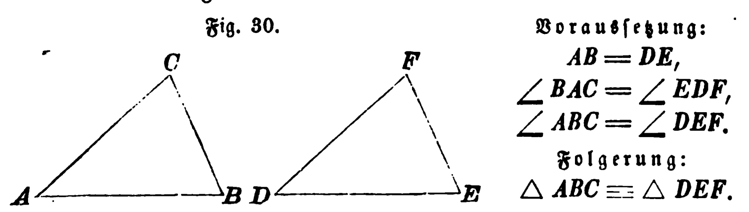
$$\angle x + \angle y < 2 R$$

erfüllt ist.

§. 56.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$\angle BAC = \angle EDF$,
$\angle ABC = \angle DEF$.

Folgerung:
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß DE auf AB fällt, d. h. D auf A, und E auf B, welches möglich ist, da beide Seiten nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann muß auch der Schenkel DF der Lage nach auf den Schenkel AC fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle BAC = \angle EDF$ ist. Ferner muß der Schenkel EF der Lage nach auf den Schenkel BC fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle ABC = \angle DEF$ ist. Endlich muß auch der Durchschnittspunkt F mit dem Durchschnittspunkt C zusammenfallen, weil, wie so eben bewiesen, die in F sich schneidenden geraden Linien DF und EF einzeln genommen, mit den in C sich schneidenden geraden Linien AC und BC zusammenfallen.

Folglich decken die beiden Dreiecke einander, und sind daher congruent, w. z. b. w.

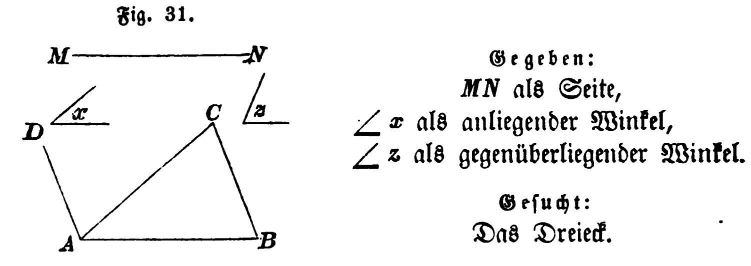
Zweite Dreiecks-Construction.

§. 57.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite, einem ihr anliegenden

Winkel und dem ihr gegenüberliegenden Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 31.



Gegeben:
MN als Seite,
$\angle x$ als anliegender Winkel,
$\angle z$ als gegenüberliegender Winkel.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang, wie die gegebene MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ebenso lege man (da der Scheitelpunkt des gegenüberliegenden Winkels noch unbekannt ist) gleichfalls im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AC, als Schenkel, einen Winkel CAD gleich dem gegebenen $\angle z$, und ziehe durch B eine gerade Linie $BC \parallel AD$. Wenn man nun die geraden Linien AC und BC hinreichend verlängert, bis sie sich in C durchschneiden, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

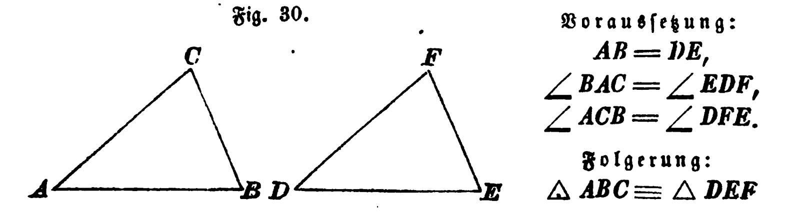
$$\angle x + \angle z < 2\,\mathfrak{R}$$

erfüllt ist.

§. 58.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite, ein ihr anliegender Winkel und der ihr gegenüberliegende Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$\angle BAC = \angle EDF$,
$\angle ACB = \angle DFE$.

Folgerung:
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Beweis. Aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken folgt, vermöge des Lehrsatzes §. 45, immer sogleich auch die Gleichheit des dritten Winkels. Es ist also in den vorliegenden Dreiecken auch

$$\angle ABC = \angle DEF.$$

Da nun in den beiden Dreiecken eine Seite nebst den beiden ihr anliegenden Winkeln gegenseitig gleich sind, so sind nach §. 56 die beiden Dreiecke congruent, w. z. b. w.

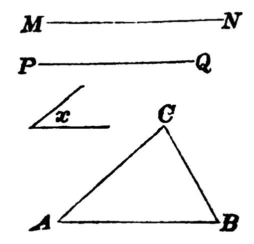
Anmerkung. Die beiden Lehrsätze §. 56 und §. 58 kann man kurz in folgenden Einen Satz zusammenfassen: Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und irgend zwei gleichliegende Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Dritte Dreiecks-Construction.

§. 59.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 32.



Gegeben:
MN und PQ als Seiten,
$\angle x$ als eingeschlossener Winkel.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang wie die eine gegebene Seite MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$, und mache den Schenkel AC dieses Winkels so lang wie die zweite gegebene Seite PQ. Zieht man endlich BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

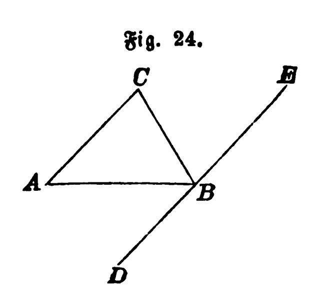
Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

$$\angle x < 2\,R$$

erfüllt ist.

Erster Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 24, eine gerade Linie $DE \parallel AC$. Alsdann hat man aus §. 40, indem man AB wie Transversale ansieht

Fig. 24.



$$\angle CAB = \angle DBA.$$

Ebenso indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle EBC.$$

Bildet man endlich noch die identische Gleichung

$$\angle ABC = \angle ABC$$

und addirt diese drei Gleichungen, so erhält man als Summe

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = \angle DBA + \angle ABC + \angle EBC.$$

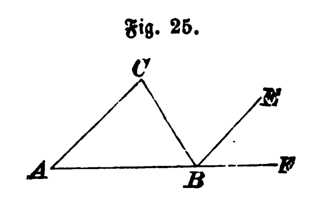
Aber die Summe $\angle DBA + \angle ABC + \angle EBC$ macht einen geraden Winkel aus, oder ist gleich 2 R; folglich muß auch

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2\,R$$

sein, w. z. b. w.

Zweiter Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 25, eine gerade Linie $BE \parallel AC$ und verlängere AB über B hinaus nach F. Alsdann hat man aus §. 41, indem man AF wie Transversale ansieht

Fig. 25.



$$\angle CAB = \angle EBF.$$

Ebenso aus §. 40 indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle EBC.$$

Bildet man endlich noch die identische Gleichung

$$\angle ABC = \angle ABC$$

und addirt diese drei Gleichungen, so findet man als Summe

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = \angle ABC + \angle EBC + \angle EBF.$$

Aber die Summe $\angle ABC + \angle EBC + \angle EBF$ macht einen geraden Winkel aus, oder ist gleich 2 R; folglich muß auch

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 2\,R$$

sein, w. z. b. w.

Dritter Beweis. Man lege durch den Eckpunkt B des Dreiecks ABC, Fig. 26, eine gerade Linie $BE \parallel AC$. Alsdann hat man nach §. 42, indem man AB wie Transversale ansieht

Fig. 26.

$$\angle CAB + \angle ABE = 2\,R,$$

wofür man auch schreiben kann, da $\angle ABE$ aus den beiden Theilen $\angle ABC$ und $\angle CBE$ besteht

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle CBE = 2\,R.$$

Ferner ist nach §. 40, indem man CB wie Transversale ansieht

$$\angle ACB = \angle CBE.$$

Folglich darf man in der vorigen Gleichung $\angle ACB$ für $\angle CBE$ an die Stelle setzen, wodurch man erhält

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2\,R,$$

w. z. b. w.

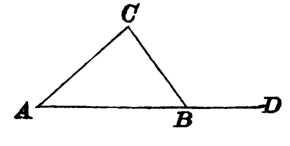
§. 46.

Erklärung. Unter einem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man einen hohlen Winkel, welcher eine Seite und die Verlängerung einer anderen Seite des Dreiecks zu Schenkeln hat.

§. 47.

Lehrsatz. Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks.

Fig. 27.



Voraussetzung:
AB ist verlängert nach D.

Folgerung:
$\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB.$

Beweis. Nach dem Lehrsatze §. 45 ist

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2\,R.$$

Ebenso ist nach §. 23

$$\angle ABC + \angle CBD = 2 R.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle CAB + \angle ABC + \angle ACB$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung den Winkel *ABC* subtrahirt, so erhält man

$$\angle CBD = \angle CAB + \angle ACB$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Man kann diesen Lehrsatz auch vor §. 45 stellen und unabhängig von diesem Paragraph beweisen, wobei Fig. 25 zu benutzen ist. Alsdann läßt sich der Beweis von §. 45 auf diesen Lehrsatz stützen.

§. 48.

Zusatz. **Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel des Dreiecks.**

So ist in der vorigen Figur

$$\angle CBD > \angle CAB$$
$$\text{und } \angle CBD > \angle ACB.$$

§. 49.

Erklärung. **Man theilt die Dreiecke in Rücksicht auf ihre Winkel in 1) spitzwinkelige Dreiecke, in denen alle Winkel spitz sind; 2) rechtwinkelige Dreiecke, in denen ein Winkel ein rechter ist; und 3) stumpfwinkelige Dreiecke, in denen ein Winkel ein stumpfer ist.**

Der Grund für diese Eintheilung der Dreiecke liegt in dem Lehrsatze §. 45, aus welchem man leicht schließt, daß in einem Dreiecke niemals mehr als Ein rechter oder Ein stumpfer Winkel enthalten sein kann.

§. 50.

Erklärung. **Im rechtwinkeligen Dreiecke heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten die Katheten, und die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite die Hypotenuse des Dreiecks.**

Die Benennungen Kathete und Hypotenuse sind griechischen Ursprungs. Kathete bedeutet wörtlich: herabgesenkte (d. i. senkrechte) Linie, und Hypotenuse: daruntergespannte Linie.

§. 51.

Erklärung. Man theilt die Dreiecke in Rücksicht auf ihre Seiten in 1) gleichseitige Dreiecke, in denen alle drei Seiten gleich groß sind; 2) gleichschenkelige Dreiecke, in denen zwei Seiten gleich groß sind; und 3) ungleichseitige Dreiecke, in denen die drei Seiten ungleich sind.

§. 52.

Erklärung. Im gleichschenkeligen Dreiecke heißen die beiden gleichen Seiten die Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie (Basis), und der der Grundlinie gegenüberliegende Eckpunkt die Spitze des Dreiecks.

§. 53.

Erklärung. Zwei Figuren werden congruent genannt, wenn sie so auf einander gelegt werden können, daß sie in allen ihren Bestandtheilen zusammenfallen oder einander decken.

Das Wort „congruent" darf man nicht mit dem Worte „gleich" verwechseln, denn das letzte wird bei geschlossenen Figuren in der Bedeutung „inhaltsgleich" gebraucht (s. §. 113). Z. B. ein Dreieck und ein Kreis können niemals congruent sein, d. h. einander decken; aber wohl können sie einander gleich sein, d. h. gleichen Flächenraum einschließen.

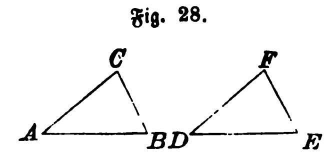
Man gebraucht das Zeichen $\equiv$ für congruent.

§. 54.

Zusatz. In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Man kann dies auch so ausdrücken: In congruenten Dreiecken sind alle gleichliegenden Bestandtheile gleich groß. Alsdann hat man unter gleichliegenden Seiten solche zu verstehen, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen; und unter gleichliegenden Winkeln solche, welche gleichen Seiten gegenüberliegen.

Fig. 28.



Z. B. wenn man voraussetzt, Fig. 28, daß $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ sei, d. h. daß man diese beiden Dreiecke so auf einander legen könne, daß D auf A, E auf B und F auf C fällt, so folgt daraus sogleich

$$AB = DE \quad , \quad AC = DF \quad , \quad BC = EF$$
$$\angle ACB = \angle DFE, \ \angle ABC = \angle DEF, \ \angle BAC = \angle EDF,$$

wo die einander gegenüberliegenden Bestandtheile eines Dreiecks je unter einander geschrieben sind.

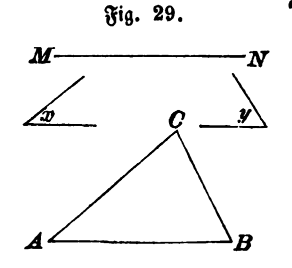
Anmerkung. Euklides, welcher in seinen Elementen ein Wort für „congruent" nicht hat, umschreibt es immer in der obigen Weise, indem er sagt, alle Seiten und alle Winkel der beiden Dreiecke seien beziehungsweise gleich groß.

Erste Dreiecks-Construction.

§. 55.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite und den beiden ihr anliegenden Winkeln ein Dreieck zu construiren.

Fig. 29.



Gegeben:
MN als Seite,
$\angle x$ als anliegender Winkel,
$\angle y$ als anliegender Winkel.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang wie die gegebene MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ebenso lege man im Punkte B, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie BA, als Schenkel, einen Winkel ABC gleich dem gegebenen $\angle y$. Verlängert man

endlich die Schenkel dieser beiden Winkel bis zu ihrem Durchschnittspunkte *C*, so ist *ABC* das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

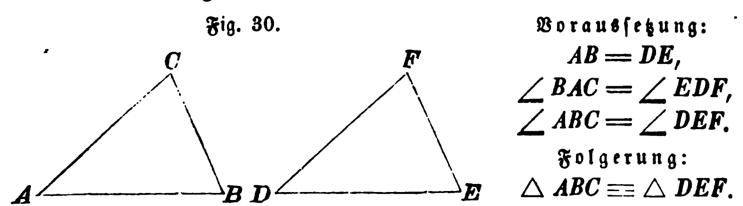
$$\angle x + \angle y < 2\,\mathfrak{R}$$

erfüllt ist.

§. 56.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$\angle BAC = \angle EDF$,
$\angle ABC = \angle DEF$.

Folgerung:
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke *ABC* und *DEF* so auf einander, daß *DE* auf *AB* fällt, d. h. *D* auf *A*, und *E* auf *B*, welches möglich ist, da beide Seiten nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann muß auch der Schenkel *DF* der Lage nach auf den Schenkel *AC* fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle BAC = \angle EDF$ ist. Ferner muß der Schenkel *EF* der Lage nach auf den Schenkel *BC* fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle ABC = \angle DEF$ ist. Endlich muß auch der Durchschnittspunkt *F* mit dem Durchschnittspunkt *C* zusammenfallen, weil, wie so eben bewiesen, die in *F* sich schneidenden geraden Linien *DF* und *EF* einzeln genommen, mit den in *C* sich schneidenden geraden Linien *AC* und *BC* zusammenfallen.

Folglich decken die beiden Dreiecke einander, und sind daher congruent, w. z. b. w.

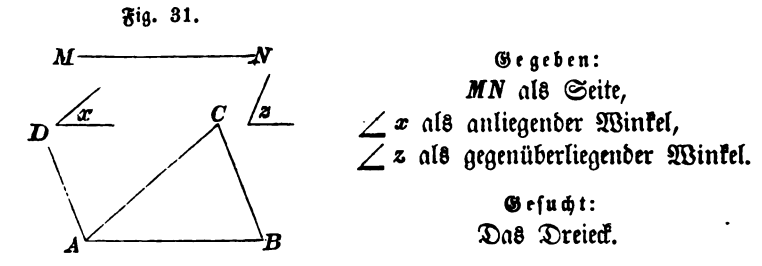
Zweite Dreiecks-Construction.

§. 57.

Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite, einem ihr anliegenden

Winkel und dem ihr gegenüberliegenden Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 31.



Gegeben:
MN als Seite,
$\angle x$ als anliegender Winkel,
$\angle z$ als gegenüberliegender Winkel.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang, wie die gegebene MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ebenso lege man (da der Scheitelpunkt des gegenüberliegenden Winkels noch unbekannt ist) gleichfalls im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AC, als Schenkel, einen Winkel CAD gleich dem gegebenen $\angle z$, und ziehe durch B eine gerade Linie $BC \parallel AD$. Wenn man nun die geraden Linien AC und BC hinreichend verlängert, bis sie sich in C durchschneiden, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

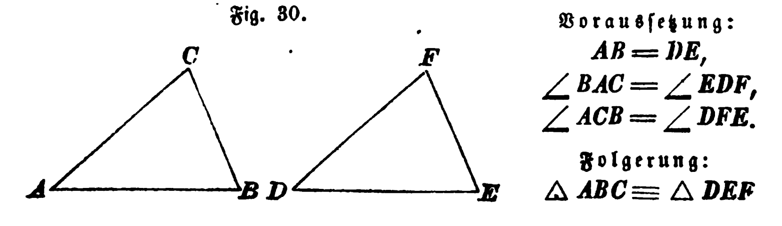
$$\angle x + \angle z < 2\,\mathfrak{R}$$

erfüllt ist.

§. 58.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken eine Seite, ein ihr anliegender Winkel und der ihr gegenüberliegende Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$\angle BAC = \angle EDF$,
$\angle ACB = \angle DFE$.

Folgerung:
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

Beweis. Aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken folgt, vermöge des Lehrsatzes §. 45, immer sogleich auch die Gleichheit des dritten Winkels. Es ist also in den vorliegenden Dreiecken auch

$$\angle ABC = \angle DEF.$$

Da nun in den beiden Dreiecken eine Seite nebst den beiden ihr anliegenden Winkeln gegenseitig gleich sind, so sind nach §. 56 die beiden Dreiecke congruent, w. z. b. w.

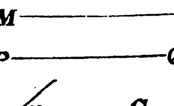
Anmerkung. Die beiden Lehrsätze §. 56 und §. 58 kann man kurz in folgenden Einen Satz zusammenfassen: Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und irgend zwei gleichliegende Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

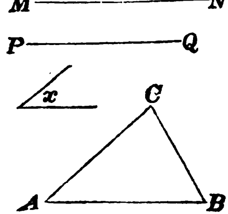
Dritte Dreiecks-Construction.

§. 59.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 32.





Gegeben:
MN und PQ als Seiten,
$\angle x$ als eingeschlossener Winkel.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB, und mache dieselbe so lang wie die eine gegebene Seite MN. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$, und mache den Schenkel AC dieses Winkels so lang wie die zweite gegebene Seite PQ. Zieht man endlich BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Aufgabe ist nur möglich, so lange die Bedingung

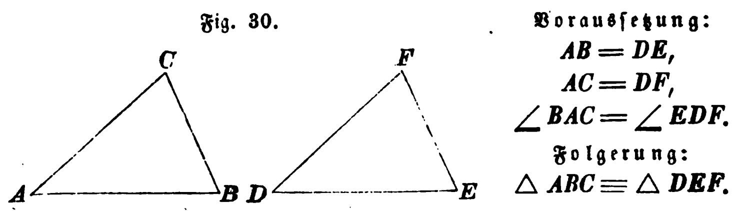
$$\angle x < 2 R$$

erfüllt ist.

§. 60.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 30.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$AC = DF$,
$\angle BAC = \angle EDF$.

Folgerung:
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß $\angle EDF$ auf BAC fällt, d. h. der Schenkel DE auf AB, und der Schenkel DF auf AC, welches möglich ist, da beide Winkel nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann muß auch der Punkt E mit B zusammenfallen, weil nach der Voraussetzung $AB = DE$ ist. Ferner muß auch der Punkt F mit C zusammenfallen, weil nach der Voraussetzung $AC = DF$ ist. Endlich fallen auch nach §. 9 die geraden Linien EF und BC auf einander.

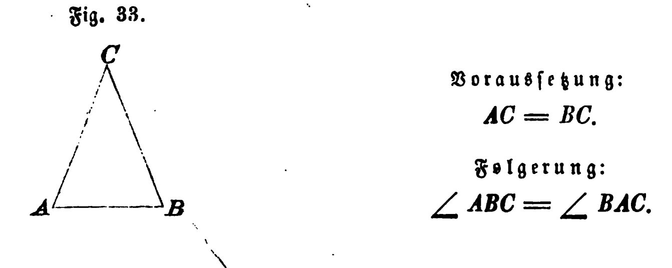
Folglich decken die beiden Dreiecke einander, und sind daher congruent, w. z. b. w.

§. 61.

Lehrsatz. In jedem gleichschenkeligen Dreiecke sind die beiden Winkel an der Grundlinie gleich groß.

Oder: In jedem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber:

Fig. 33.



Voraussetzung:
$AC = BC$.

Folgerung:
$\angle ABC = \angle BAC$.

Beweis. Man denke sich das Dreieck *ABC* von seiner Stelle gehoben, umgewendet, und so wieder niedergelegt, daß die Spitze *C* des Dreiecks wieder in sich selbst fällt und die Schenkel *AC* und *BC* vertauscht werden. Alsdann muß *B* in *A*, und *A* in *B* fallen, wegen der vorausgesetzten Gleichheit $AC = BC$. Folglich muß auch nach §. 9 die Seite *AB* wieder in sich selbst fallen, nur in umgekehrter Lage *BA*. Also wird das Dreieck *ABC* sich selbst decken.

Daraus aber folgt weiter, daß auch die beiden Winkel *ABC* und *BAC* einander decken, mithin gleich groß sind, w. z. b. w.

Aus diesem Lehrsatze folgt zugleich, mit Anwendung von §. 45, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks nur spitze Winkel sein können.

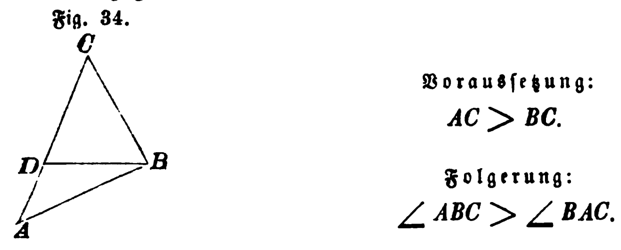
§. 62.

Zusatz. Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind sämmtlich gleich groß.

Die Größe jedes einzelnen Winkels im gleichseitigen Dreieck beträgt daher $\frac{2}{3}$ R oder 60°.

§. 63.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel, der kleineren der kleinere Winkel gegenüber.



Voraussetzung:

$AC > BC$.

Folgerung:

$\angle ABC > \angle BAC$.

Beweis. Man trage die kleinere Seite *CB* auf der größeren *CA* von *C* aus ab, bis *D*, so daß $CD = CB$ wird, und ziehe *DB*. Alsdann ist nach §. 61 in dem gleichschenkeligen Dreiecke *DBC*

$$\angle DBC = \angle BDC.$$

Aber $\angle DBC$ ist nur ein Theil von $\angle ABC$, oder

$$\angle ABC > \angle DBC,$$

folglich ist auch

$$\angle ABC > \angle BDC.$$

Ferner ist $\angle BDC$ Außenwinkel des Dreiecks BAD, also nach §. 48

$$\angle BDC > \angle BAC,$$

und daraus endlich folgt, mit Zuziehung des Vorigen,

$$\angle ABC > \angle BAC$$

w. z. b. w.

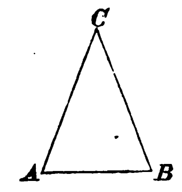
§. 64.

Lehrsatz. Jedes Dreieck, in welchem zwei Winkel gleich groß sind, ist ein gleichschenkeliges Dreieck, und die genannten Winkel sind Winkel an der Grundlinie dieses gleichschenkeligen Dreiecks.

Oder: In jedem Dreiecke liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 61.)

Fig. 33.



Voraussetzung:

$$\angle ABC = \angle BAC.$$

Folgerung:

$$AC = BC.$$

Beweis. Gesetzt es sei nicht $AC = BC$, so könnte entweder $AC > BC$, oder $AC < BC$ angenommen werden. Aus der ersten Annahme $AC > BC$ aber folgt nach dem vorigen Lehrsatze, daß $\angle ABC > \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet der Voraussetzung. Aus der zweiten Annahme $AC < BC$ folgt gleichfalls nach dem vorigen Lehrsatze, daß $\angle ABC < \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet gleichfalls der Voraussetzung.

Der Widerspruch hört nur dann auf, wenn $AC = BC$ ist, w. z. b. w.

Anmerkung. Anfänger müssen sich hüten, die beiden Lehrsätze §. 61 und §. 64 mit dem Satze §. 54 zu verwechseln. Der Satz §. 54 handelt von Seiten und Winkeln in congruenten Dreiecken, dagegen die §§. 61 und 64 handeln von Seiten und Winkeln in einem und demselben Dreiecke.

§. 65.

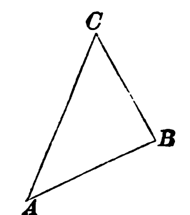
Zusatz. Jedes Dreieck, in welchem die drei Winkel gleich groß sind, ist ein gleichseitiges Dreieck.

§. 66.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke liegt dem größern von zwei Winkeln die größere Seite, dem kleineren die kleinere Seite gegenüber.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 63.)

Fig. 35.



Voraussetzung:

$\angle ABC > \angle BAC.$

Folgerung:

$AC > BC.$

Beweis. Gesetzt es sei nicht $AC > BC$, so könnte entweder $AC = BC$, oder $AC < BC$ angenommen werden. Aus der ersten Annahme $AC = BC$ aber folgt nach §. 61, daß $\angle ABC = \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet der Voraussetzung. Aus der zweiten Annahme $AC < BC$ folgt nach §. 63, daß $\angle ABC < \angle BAC$ ist, und dies widerstreitet gleichfalls der Voraussetzung.

Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn $AC > BC$ ist, w. z. b. w.

§. 67.

Zusatz. In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse immer größer als jede der beiden Katheten.

Ebenso ist in einem stumpfwinkeligen Dreiecke diejenige Seite, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, größer als jede der beiden andern Seiten.

§. 68.

Lehrsatz des Thales. Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Fig. 36.

Voraussetzung:

Bogen ACB ist ein Halbkreis.

Folgerung:

$$\angle ACB = R.$$

Beweis. Da der Bogen ACB ein Halbkreis ist, so muß die gerade Linie AB ein Durchmesser und der Punkt M, welcher die AB in zwei gleiche Theile theilt, der Mittelpunkt des Kreises sein, welchem der gegebene Halbkreis angehört. Zieht man nun MC, so theilt diese (nach §. 27) das Dreieck ABC in die beiden gleichschenkeligen Dreiecke AMC und BMC.

In dem gleichschenkeligen Dreiecke AMC ist nach §. 61

$$\angle ACM = \angle CAM,$$

ebenso ist in dem gleichschenkeligen Dreiecke BMC

$$\angle BCM = \angle CBM,$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man

$$\angle ACB = \angle CAM + \angle CBM.$$

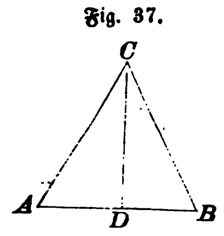
Nun machen die drei Winkel ACB, CAM und CBM, welche diese Gleichung enthält, nach §. 45 zusammen zwei rechte Winkel aus; folglich muß $\angle ACB$ für sich genommen gleich Einem rechten Winkel sein, w. z. b. w.

Anmerkung. Der hier bewiesene Satz wird dem Thales zugeschrieben, welcher um das Jahr 640 vor Chr. Geb. zu Milet geboren wurde und der älteste uns bekannte Mathematiker der Griechen ist. Man erzählt von ihm ferner, daß er den Ägyptern Anleitung gegeben habe, die Höhe ihrer Pyramiden aus der Länge des geworfenen Schattens zu bestimmen, worüber der König Amasis, welcher Zeuge davon war, seine große Verwunderung und Anerkennung ausgesprochen haben soll. Nimmt man hiezu den obigen ihm zugeschriebenen Satz, so sieht man, auf welcher Stufe der Kindheit noch zu jener Zeit die Geometrie bei den Griechen sich befand. Die bedeutendste Leistung des Thales war die Vorherverkündigung einer totalen Sonnenfinsterniß, welche auf einen Tag fiel, wo Alyattes, König von Lydien, und Cyaxares, König von Medien, einander in einer Schlacht gegenüberstanden. Dies geschah nach der neuesten von Zech (1853) geführten und von Airy (1858) wiederholten Rechnung am 28. Mai des Jahres 584 vor Chr. Geb.

§. 69.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche aus der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gezogen wird, steht rechtwinkelig auf der Grundlinie und halbirt den Winkel an der Spitze.

Fig. 37.



Voraussetzung:
$AC = BC$,
$AD = BD$.

Folgerung:
1) $CD \perp AB$,
2) $\angle ACD = \angle BCD$.

Beweis. Man hat

$AC = BC$ nach der Voraussetzung
$AD = BD$ desgl.
$\angle CAD = \angle CBD$ nach §. 61.

Folglich ist nach §. 60

$\triangle CAD \equiv \triangle CBD$,

und daraus nach §. 54

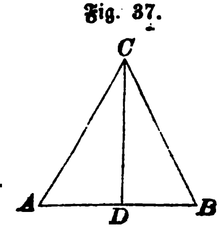
1) $\angle CDA = \angle CDB$, d. i. $CD \perp AB$,
und 2) $\angle ACD = \angle BCD$,

w. z. b. w.

§. 70.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche aus der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks rechtwinkelig auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

Fig. 37.



Voraussetzung:
$AC = BC$,
$CD \perp AB$.

Folgerung:
1) $AD = BD$,
2) $\angle ACD = \angle BCD$.

Beweis. Man hat

$AC = BC$ nach der Voraussetzung,

$\angle ADC = \angle BDC$ desgl.,

$\angle CAD = \angle CBD$ nach § 61.

Folglich ist nach §. 58

$\triangle CAD \equiv \triangle CBD,$

und daraus nach §. 54

1) $AD = BD$

und 2) $\angle ACD = \angle BCD,$

w. z. b. w.

§. 71.

Zusatz. **Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene gerade Linie ist nur Ein Perpendikel möglich.**

Denn es würde sonst im vorigen Paragraph zwei verschiedene Halbirungspunkte der Linie *AB* geben.

Dieser Satz kann auch indirect aus §. 45 bewiesen werden.

§. 72.

Lehrsatz. **Eine gerade Linie, welche den Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks halbirt, halbirt auch die Grundlinie und steht rechtwinkelig auf der Grundlinie.**

Fig. 37.

Voraussetzung:

$AC = BC,$

$\angle ACD = \angle BCD.$

Folgerung:

1) $AD = BD,$

2) $CD \perp AB.$

Beweis. Man hat

$AC = BC$ nach der Voraussetzung,

$\angle ACD = \angle BCD$ desgl.,

$\angle CAD = \angle CBD$ nach §. 61.

Folglich ist nach §. 56

$\triangle CAD \equiv \triangle CBD,$

und daraus nach §. 54

1) $AD = BD,$

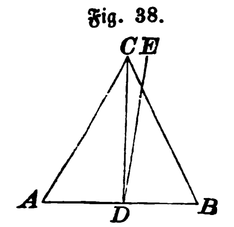
und 2) $\angle CDA = \angle CDB$, d. i. $CD \perp AB$

w. z. b. w.

§. 73.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreiecks rechtwinkelig auf dieser Grundlinie errichtet wird, trifft die Spitze des Dreiecks.

Fig. 38.



Voraussetzung:
$AC = BC$,
$AD = BD$,
$DE \perp AB$.

Folgerung:
DE trifft C.

Beweis. Gesetzt DE treffe nicht die Spitze C des Dreiecks. Alsdann kann man D mit C durch eine gerade Linie DC verbinden, welche von DE verschieden ist. Nun hat man auch §. 69

$$DC \perp AB.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$DE \perp AB.$$

Folglich hat man in Einem Punkte D der Grundlinie AB zwei Perpendikel auf dieser Linie, welches dem §. 22 widerspricht.

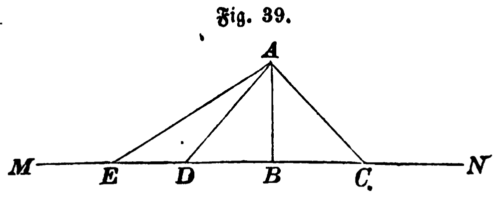
Der Widerspruch fällt nur dann weg, wenn DE mit DC zusammenfällt, d. i. durch die Spitze des Dreiecks geht, w. z. b. w.

§. 74.

Lehrsatz. Wenn man aus einem gegebenen Punkte, welcher außerhalb einer gegebenen geraden Linie liegt, Strahlen nach dieser Linie zieht, und die Längen dieser Strahlen unter einander vergleicht, so ergiebt sich Folgendes:

1) Der kürzeste von diesen Strahlen ist das Perpendikel, welches aus dem gegebenen Punkte auf die gegebene gerade Linie gefällt wird.

Fig. 39.

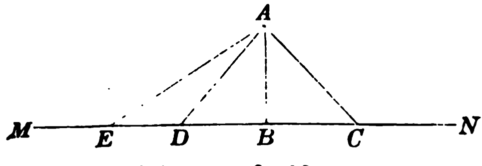


Voraussetzung:
$AB \perp MN$.

Folgerung:
$AB < AC$.

Beweis folgt aus §. 67.

2) Jede zwei Strahlen, deren Fußpunkte auf der gegebenen geraden Linie sich gleich weit von dem Fußpunkte des Perpendikels entfernen, sind gleich lang.

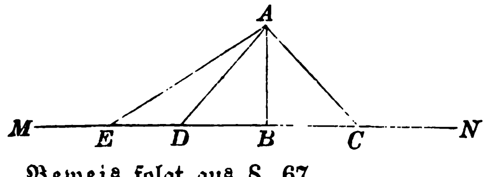


Voraussetzung:
$AB \perp MN$,
$BC = BD$

Folgerung:
$AC = AD$.

Beweis folgt aus §. 60.

3) Jeder Strahl ist desto länger, je weiter sein Fußpunkt auf der gegebenen geraden Linie sich von dem Fußpunkt des Perpendikels entfernt.



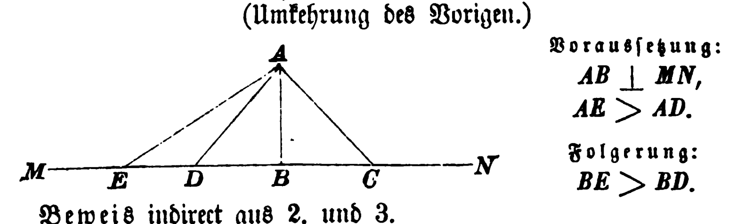
Voraussetzung:
$AB \perp MN$,
$BE > BD$.

Folgerung:
$AE > AD$.

Beweis folgt aus §. 67.

4) Je länger ein Strahl ist, desto weiter muß sein Fußpunkt auf der gegebenen geraden Linie sich von dem Fußpunkte des Perpendikels entfernen.

(Umkehrung des Vorigen.)

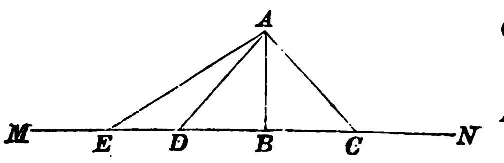


Voraussetzung:
$AB \perp MN$,
$AE > AD$.

Folgerung:
$BE > BD$.

Beweis indirect aus 2. und 3.

5) Drei gleich lange Strahlen von dem gegebenen Punkte nach der gegebenen geraden Linie kann es nicht geben.



Voraussetzung:
C, D, E in Einer geraden Linie.

Folgerung:
$AC = AD = AE$ ist unmöglich.

Beweis. Gesetzt es sei $AC = AD = AE$. Aus der Gleichung $AC = AD$ folgt, vermöge des Lehrsatzes §. 61, daß $\angle ADC$ ein spitzer Winkel ist. Aus der Gleichung $AD = AE$ folgt ebenso, daß $\angle ADE$ ein spitzer Winkel ist. Folglich hat man

$$\angle ADC + \angle ADE < 2 \text{ R},$$

welches dem Lehrsatz §. 23 widerstreitet.

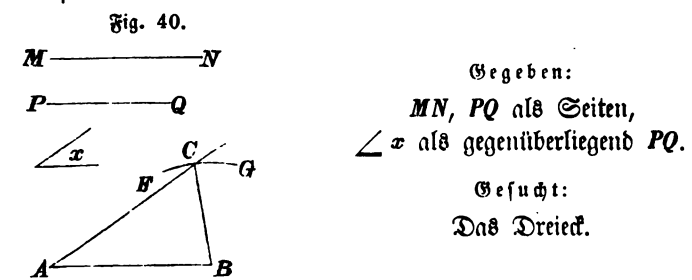
Der Widerspruch hört nur auf, wenn nicht $AC = AD = AE$ ist, w. z. b. w.

Vierte Dreiecks-Construction.

§. 75.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten und dem der einen dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ein Dreieck zu construiren.

Fig. 40.



Gegeben:

MN, PQ als Seiten,
$\angle x$ als gegenüberliegend PQ.

Gesucht:

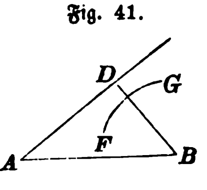
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie AB und mache dieselbe so lang wie die gegebene MN, welche dem gegebenen $\angle x$ anliegen soll. Sodann lege man im Punkte A, als Scheitelpunkt, an die gerade Linie AB, als Schenkel, einen Winkel BAC gleich dem gegebenen $\angle x$. Ferner construire man aus dem Punkte B als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Seite PQ, einen Kreisbogen FG. Verbindet man endlich den Punkt C, in welchem dieser Kreisbogen den Schenkel AC schneidet, mit B durch die gerade Linie BC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Determination. Die verschiedenen Fälle, welche diese Construction darbieten kann, lassen sich am bequemsten übersehen, wenn man aus dem Punkte B auf den Schenkel AC ein Perpendikel fällt. Es sei BD, Fig. 41—45, dieses Perpendikel. Alsdann erhält man:

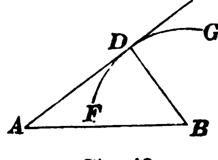
I. Der gegebene $\angle x$ sei ein spitzer Winkel.

Fig. 41.



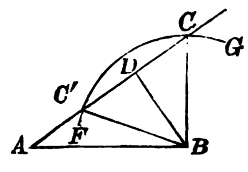
1) Die gegebene Seite *PQ*, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei kleiner, als dieses Perpendikel *BD*. In diesem Falle kommt kein Dreieck zu Stande, oder die Aufgabe ist unmöglich.

Fig. 42.



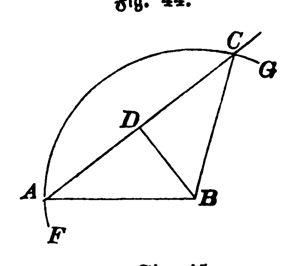
2) Die gegebene Seite *PQ*, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei gleich dem Perpendikel *BD*. In diesem Falle entsteht das rechtwinkelige Dreieck *ABD*.

Fig. 43.



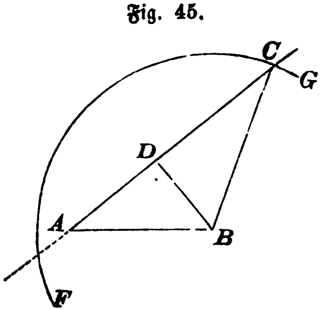
3) Die gegebene Seite *PQ*, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei größer als das Perpendikel *BD*, aber kleiner als die gegebene anliegende Seite *MN*=*AB*. In diesem Falle entstehen zwei verschiedene Dreiecke *ABC* und *ABC′*, welche beide der Aufgabe Genüge leisten.

Fig. 44.



4) Die gegebene Seite *PQ*, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei gleich der gegebenen anliegenden Seite *MN* = *AB*. In diesem Falle entsteht das gleichschenkelige Dreieck *ABC*.

Fig. 45.



5) Die gegebene Seite *PQ*, welche dem gegebenen $\angle x$ gegenüberliegen soll, sei größer als die gegebene anliegende Seite *MN* = *AB*. In diesem Falle entsteht ein Dreieck *ABC*.

II. Der gegebene $\angle x$ sei ein rechter oder stumpfer Winkel.

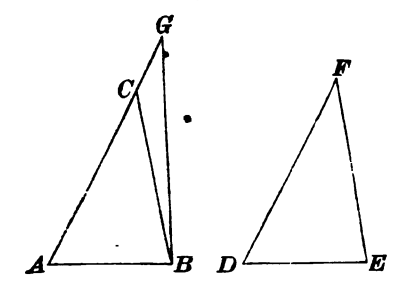
Hier kann von der vorigen Aufzählung nur der 5. Fall bestehen bleiben, indem in den vier anderen Fällen kein Dreieck zu Stande kommt.

Die Begründung dieser Determination folgt aus dem Lehrsatze §. 74.

§. 76.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren dieser beiden Seiten gegenüberliegende Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 46.



Voraussetzung:

$AB = DE,$
$BC = EF,$
$\angle BAC = \angle EDF,$
$BC > AB,\ EF > DE.$

Folgerung:

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß DE auf AB fällt, d. h. D auf A und E auf B, welches möglich ist, da beide Seiten nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann muß auch der Schenkel DF der Richtung nach auf den Schenkel AC fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle BAC = \angle EDF$ ist. Nun entsteht die Frage: ob auch der Punkt F in den Punkt C fallen wird.

Gesetzt es falle F nicht in C, sondern in einen andern Punkt des Schenkels AC, z. B. über C hinaus in G. Man ziehe BG. Alsdann wird das Dreieck DEF das Dreieck ABG decken, also $EF = BG$ sein. Aber nach der Voraussetzung ist $BC = EF$. Also ist auch $BC = BG$, oder das Dreieck BCG ist gleichschenkelig, und deshalb vermöge des §. 61 $\angle BCG$ ein spitzer Winkel und folglich sein Nebenwinkel $\angle BCA$ ein stumpfer Winkel. Daraus aber folgt nach §. 67

$$AB > BC$$

und dies ist ein Widerspruch gegen die Voraussetzung $BC > AB$.

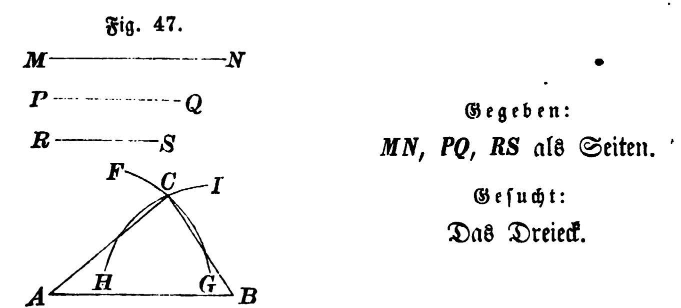
Derselbe Widerspruch würde zum Vorschein gekommen sein, wenn man den Punkt *G* zwischen *A* und *C* angenommen hätte.

Der Widerspruch wird nur gehoben, wenn der Punkt *G* nicht verschieden von *C* ist. In diesem Falle deckt das Dreieck *DEF* vollständig das Dreieck *ABC*, d. h. diese beiden Dreiecke sind congruent, w. z. b. w.

Fünfte Dreiecks-Construction.

§. 77.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Seiten ein Dreieck zu construiren.



Gegeben:
MN, *PQ*, *RS* als Seiten.

Gesucht:
Das Dreieck.

Construction. Man ziehe eine gerade Linie und mache dieselbe so lang wie die gegebene *MN*. Alsdann construire man aus dem Punkte *A*, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Seite *PQ* einen Kreisbogen *FG*. Ferner construire man aus dem Punkte *B*, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Seite *RS*, einen Kreisbogen *HI*. Verbindet man endlich denjenigen Punkt *C*, in welchem diese beiden Kreisbögen einander schneiden, mit *A* und *B* durch die geraden Linien *AC* und *BC*, so ist *ABC* das gesuchte Dreieck.

Determination. Die Construction ist nur möglich, wenn die drei gegebenen Seiten *MN*, *PQ* und *RS* den beiden Bedingungen Genüge leisten

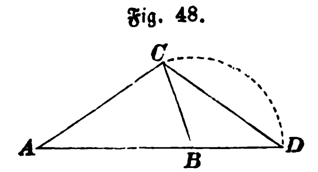
$$MN + PQ > RS,$$
$$MN - PQ < RS.$$

z. B. wenn zwei Seiten eines Dreiecks zu 6 und 11 Meter willkürlich gegeben sind, so muß die dritte Seite kleiner als 17 und größer als 5 Meter genommen werden, wenn aus diesen drei Seiten ein Dreieck zu Stande kommen soll. Der Grund hiervon liegt in den beiden folgenden Lehrsätzen.

§. 78.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Fig. 48.



Voraussetzung:

AB, BC, AC bilden ein Dreieck.

Folgerung:

$AB + BC > AC$.

Beweis. Um die Summe $AB + BC$ in Einer geraden Linie darzustellen, verlängere man AB über B hinaus und mache die Verlängerung $BD = BC$. Sodann ist $AD = AB + BC$.

Zieht man nun die gerade Linie CD, so entsteht das gleichschenkelige Dreieck BCD, in welchem man nach §. 61 hat

$$\angle BCD = \angle BDC.$$

Aber $\angle BCD$ ist nur ein Theil des $\angle ACD$, also

$$\angle ACD > \angle BDC.$$

Diese beiden Winkel sind nun Winkel des Dreiecks ADC, und wenn man darauf den Lehrsatz §. 66 anwendet, so wird

$$AD > AC,$$

d. i. $AB + BC > AC$,

w. z. b. w.

Anmerkung. Man beweist diesen Lehrsatz häufig auf eine Weise, die ihrer Kürze wegen hier noch erwähnt werden mag.

Zwischen den beiden Punkten A und C ist der kürzeste Weg die gerade Linie AC. Jeder andere Weg ist länger, also auch z. B. der Weg von A über B nach C, d. h. der Weg $AB + BC$. Folglich hat man $AB + BC > AC$, w. z. b. w.

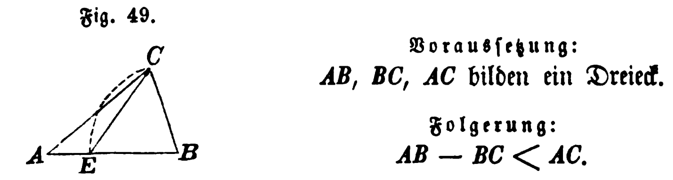
Dieser Beweis hat die besondere Eigenschaft, daß er sich nicht auf vorhergegangene Sätze der Planimetrie, sondern auf einen eigenthümlichen Grundsatz stützt, welcher lautet: „Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie". So einfach nun auch

dieser Grundsatz ist und so leicht er von jedermann zugestanden wird, so darf man doch nicht in einer wissenschaftlichen Geometrie gewissen Beweisen zu Gefallen neue Grundsätze einführen, und deshalb gehört jener Beweis nicht hierher. Auch findet er sich nicht bei Euklides.

§. 79.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

Fig. 49.



Voraussetzung:
AB, BC, AC bilden ein Dreieck.

Folgerung:
$AB - BC < AC$.

Beweis. Um die Differenz $AB - BC$ in Einer geraden Linie darzustellen, schneide man auf AB von B aus eine Länge $BE = BC$ ab. Alsdann ist $AE = AB - BC$.

Zieht man nun die gerade Linie CE, so entsteht das gleichschenkelige Dreieck BCE, in welchem nach §. 61 die Winkel an der Grundlinie CE gleich groß, und mithin spitze Winkel sind. Folglich ist $\angle AEC$ als Nebenwinkel eines spitzen Winkels ein stumpfer Winkel. Dieser Winkel ist nun ein Winkel des Dreiecks AEC; man hat also mit Anwendung des §. 67

$$AE < AC,$$

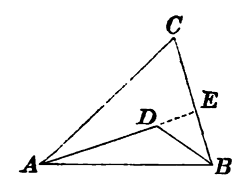
d. i. $AB - BC < AC$,

w. z. b. w.

§. 80.

Lehrsatz. Wenn man über einer gemeinschaftlichen Seite zwei Dreiecke construirt, von denen das eine das andere umschließt, so ist die Summe der nicht gemeinschaftlichen Seiten in dem umschließenden Dreiecke größer als in dem umschlossenen.

Fig. 50.



Voraussetzung:
$\triangle ABC$ umschließt $\triangle ABD$.

Folgerung:
$AC + CB > AD + DB$.

Beweis. Man verlängere AD bis E. Alsdann ist nach dem Lehrsatze §. 78

$$AC + CE > AE,$$

und ebenso

$$DE + EB > DB.$$

Daraus folgt durch Addition

$$AC + CB + DE > AE + DB,$$

und wenn man hiervon die identische Gleichung $DE = DE$ subtrahirt, so ergiebt sich

$$AC + CB > AD + DB,$$

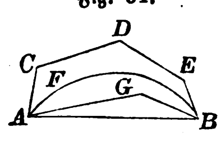
w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist der einfachste Fall eines viel allgemeineren Satzes, welcher in den späteren Theilen der Geometrie häufig gebraucht wird, und welchen Archimedes in seinem Buche über die Kugel ausdrückt wie folgt:

„Wenn von zwei Linien, welche einerlei Endpunkte haben und nach einerlei Seite hohl sind, die eine die andere ganz umschließt, so ist die umschließende Linie größer als die umschlossene".

Das Wort Linie wird hier in demselben allgemeinen Sinne genommen, wie im §. 2 Anm. So ist z. B. die gebrochene Linie $ACDEB$, Fig. 51, länger als die krumme Linie AFB, und diese wieder länger als die gebrochene Linie AGB. Alle diese Linien sind nach einerlei Seite hohl, nämlich sie wenden sämmtlich ihre hohle Seite nach der geraden Linie AB hin.

Fig. 51.

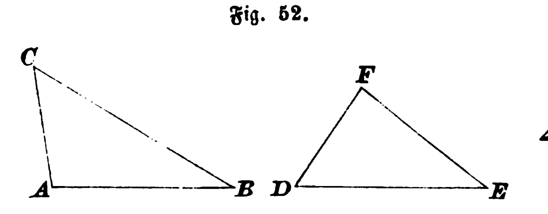


§. 81.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, die *von diesen* Seiten eingeschlossenen Winkel aber

ungleich sind, so ist die dritte Seite in demjenigen von beiden Dreiecken die größere, in welchem der eingeschlossene Winkel der größere ist.

Fig. 52.



Voraussetzung:

$AB = DE,$

$AC = DF,$

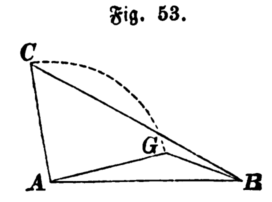
$\angle BAC > \angle EDF.$

Folgerung:

$BC > EF.$

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke *ABC* und *DEF* so auf einander, daß eine der gleichen Seiten zusammenfällt, z. B. *DE* auf *AB*, d. h. *D* auf *A* und *E* auf *B*. Alsdann muß die Seite *DF* innerhalb des Winkels *BAC* fallen, weil nach der Voraussetzung $\angle BAC > \angle EDF$ ist. Es entsteht nun noch die Frage, wohin der Punkt *F* fallen wird; hier lassen sich drei Fälle unterscheiden.

Fig. 53.



1) Der Punkt *F* falle innerhalb des Dreiecks *ABC* in *G*, Fig. 53, so daß $\triangle$ *DEF* die Lage *ABG* annimmt. Alsdann ist nach dem vorigen Lehrsatze

$$AC + BC > AG + BG.$$

Aber in Folge der Voraussetzung ist

$$AC = AG,$$

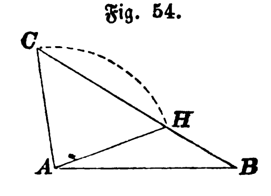
und wenn man diese Gleichung von dem Vorigen subtrahirt, so bleibt

$$BC > BG,$$

d. i. $BC > EF,$

w. z. b. w.

Fig. 54.



2) Der Punkt *F* falle in die Seite *BC* in *H*, Fig. 54, so daß $\triangle$ *DEF* die Lage *ABH* annimmt. Alsdann zeigt sich unmittelbar aus der Figur, daß

$$BC > BH,$$

d. i. $BC > EF,$

w z. b. w.

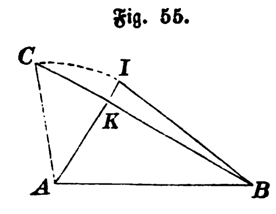


Fig. 55.

3) Der Punkt F falle außerhalb des Dreiecks ABC in I, Fig. 55, so daß $\triangle DEF$ die Lage ABI annimmt. Alsdann findet man durch zweimalige Anwendung des Lehrsatzes §. 78

$$AK + KC > AC,$$
$$BK + KI > BI$$

und daraus durch Addition

$$AI + BC > AC + BI.$$

Aber in Folge der Voraussetzung ist

$$AI = AC$$

und wenn man diese Gleichung von dem Vorigen subtrahirt, so bleibt

$$BC > BI,$$

d. i. $BC > EF$,

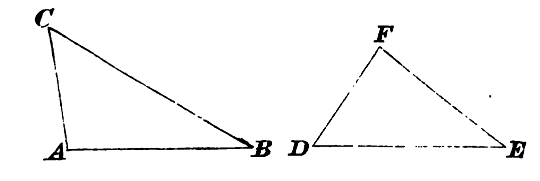
w. z. b. w.

§. 82.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich sind, die dritte Seite aber in beiden Dreiecken ungleich ist, so ist der von den ersteren beiden Seiten eingeschlossene Winkel in demjenigen Dreiecke der größere, in welchem die dritte Seite die größere ist.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 52.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$AC = DF$,
$BC > EF$.

Folgerung:
$\angle BAC > \angle EDF$.

Beweis. Gesetzt es sei nicht $\angle BAC > \angle EDF$, so könnte entweder $\angle BAC = \angle EDF$, oder $\angle BAC < \angle EDF$ sein.

Im ersten Falle, wo $\angle BAC = \angle EDF$ angenommen wird, müßten nach dem Lehrsatze §. 60 die beiden Dreiecke ABC und DEF congruent sein, also auch $BC = EF$. Dies widerstreitet aber der Voraussetzung, wo $BC > EF$ ist.

Im zweiten Falle, wo $\angle BAC < \angle EDF$ angenommen wird, würde aus der Anwendung des vorigen Lehrsatzes §. 81 folgen, daß $BC < EF$ ist. Dies widerstreitet aber ebenfalls der Voraussetzung $BC > EF$.

Der Widerspruch wird aufgehoben, wenn man setzt

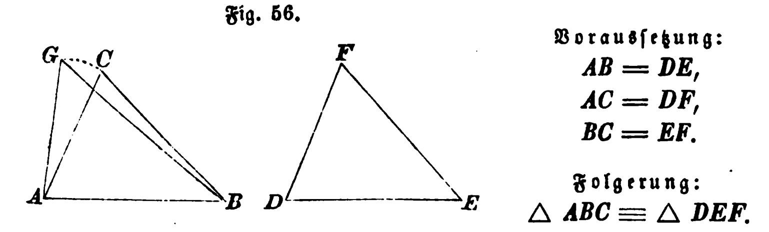
$$\angle BAC > \angle EDF,$$

w. z. b. w.

§. 83.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 56.



Voraussetzung:
$AB = DE$,
$AC = DF$,
$BC = EF$.

Folgerung:
$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke ABC und DEF so auf einander, daß DE auf AB fällt, d. h. D auf A und E auf B, welches möglich ist, da beide Seiten nach der Voraussetzung gleich groß sind. Alsdann entsteht zunächst die weitere Frage, ob auch die Seite DF auf AC fallen wird.

Gesetzt es falle DF nicht auf AC, sondern in eine andere von A ausgehende Richtung, z. B. außerhalb des Winkels BAC in AG, so daß $AG = DF = AC$ ist. Zieht man BG, und wendet auf die beiden Dreiecke ABC und ABG den §. 81 an, so folgt

$$BG > BC.$$

Aber zugleich deckt das Dreieck DEF das Dreieck ABG, folglich ist $EF = BG$ und mithin auch

$$EF > BC,$$

was der Voraussetzung $BC = EF$ widerspricht.

Derselbe Widerspruch würde erschienen sein, wenn man angenommen hätte, die Seite DF falle innerhalb des Winkels BAC.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn *DF* auf *AC* fällt. In diesem Falle deckt das Dreieck *DEF* vollständig das Dreieck *ABC*, d. h. diese beiden Dreiecke sind congruent, w. z. b. w.

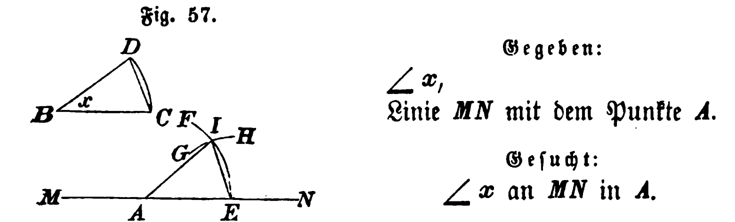
Anmerkung. Die fünf Lehrsätze §§. 56, 58, 60, 76 und 83 werden die fünf Congruenzsätze des Dreiecks genannt. Die Anzahl derselben reducirt sich auf vier, wenn man nach der Anmerkung zu §. 58 die beiden ersten dieser Sätze in einen einzigen zusammenzieht.

Aufgaben über das Dreieck.

§. 84.

Aufgabe. An eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte derselben einen gegebenen Winkel zu tragen.

Fig. 57.



Gegeben:

$\angle x$,
Linie *MN* mit dem Punkte *A*.

Gesucht:

$\angle x$ an *MN* in *A*.

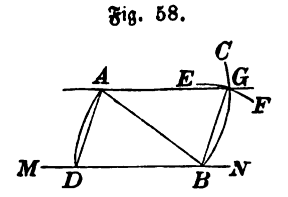
Construction. Man construire aus dem Scheitelpunkte *B* des $\angle x$, als Mittelpunkt, mit einem beliebigen Halbmesser *BC* zwischen den Schenkeln dieses Winkels den Bogen *CD*, und aus dem gegebenen Punkte *A*, als Mittelpunkt, mit demselben Halbmesser den Bogen *EF*; ziehe *CD*; und mit einem Halbmesser gleich *CD* construire man aus *E*, als Mittelpunkt, den Bogen *GH*. Verbindet man sodann *A* mit dem Durchschnittspunkt *I* der Bögen *EF* und *GH* durch die gerade Linie *AI*, so ist $\angle IAE$ der gesuchte Winkel $= \angle x$.

Der Beweis folgt, wenn man *EI* zieht, aus §. 83.

§. 85.

Aufgabe. Zu einer gegebenen geraden Linie durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu ziehen.

Fig. 58.



Gegeben:
Linie *MN*,
Punkt *A*.

Gesucht:
Parallele zu *MN* durch *A*.

Construction. Man construire aus dem gegebenen Punkte *A* mit einem beliebigen, jedoch hinreichend großen Halbmesser *AB* den Bogen *BC*, und aus *B* mit demselben Halbmesser den Bogen *AD*; ziehe *AD*; und mit einem Halbmesser gleich *AD* construire man aus *B* den Bogen *EF*. Verbindet man sodann *A* mit dem Durchschnittspunkte *G* der Bögen *BC* und *EF* durch die gerade Linie *AG*, so ist diese die gesuchte Parallele zu *MN*.

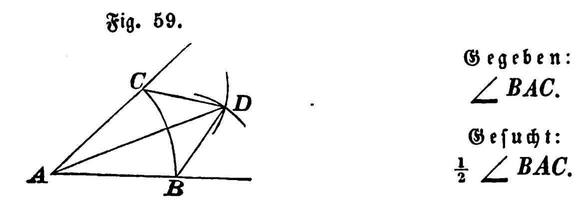
Der Beweis folgt, nachdem man *BG* gezogen hat, aus den §§. 83 und 37.

Anmerkung. In den planimetrischen Zeichnungen wird diese Aufgabe einfacher durch Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks gelöst, welches man längs einem geraden Lineale schiebt.

§. 86.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 59.



Gegeben:
$\angle BAC$.

Gesucht:
$\frac{1}{2} \angle BAC$.

Construction. Man construire aus dem Scheitelpunkt *A* des gegebenen Winkels mit einem beliebigen Halbmesser zwischen den Schenkeln dieses Winkels den Bogen *BC*, und darauf aus *B* und *C* mit einerlei, jedoch hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche sich in *D* schneiden. Zieht man sodann *AD*, so ist sowohl $\angle DAC$ als $\angle DAB$ die gesuchte Hälfte von $\angle BAC$.

Zum Beweise ziehe man *BD* und *CD* und wende §. 83 an.

§. 87.

Aufgabe. Einen gegebenen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 60.



Gegeben:
$\angle BAC =$ R.

Gesucht:
$\frac{1}{3} \angle BAC.$

Construction. Man construire aus dem Scheitelpunkte *A* des gegebenen rechten Winkels mit einem beliebigen Halbmesser zwischen den Schenkeln dieses Winkels den Bogen *BC*, und darauf mit demselben Halbmesser aus *B* den Bogen *AD*, und aus *C* den Bogen *AE*. Zieht man nun *AD* und *AE*, so ist jeder der drei Winkel *BAE*, *EAD* und *DAC* ein Drittel des gegebenen rechten Winkels *BAC*.

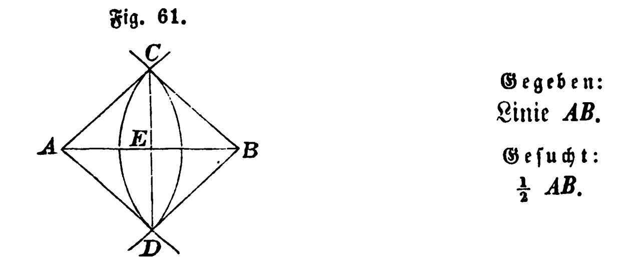
Der Beweis folgt, nachdem man *BD* und *CE* gezogen, aus §. 62.

Anmerkung. Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen (**Trisectio anguli**), welche die Griechen zur Zeit Platons viel beschäftigt und wegen ihrer Schwierigkeit eine gewisse Berühmtheit erhalten hat, kann durch die Hülfsmittel der Elementar-Geometrie allein nicht aufgelöst werden.

§. 88.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 61.



Gegeben:
Linie *AB*.

Gesucht:
$\frac{1}{2}$ *AB*.

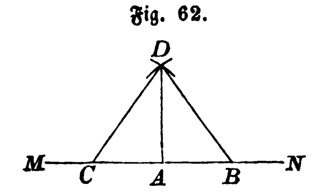
Construction. Man construire aus *A* und *B* mit einerlei, jedoch hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche sich in *C* und *D* durchschneiden, und ziehe *CD*. Der Schnittpunkt *E* theilt sodann die gegebene gerade Linie *AB* in die beiden gleichen Theile *AE* und *BE*.

Zum Beweise ziehe man *AC*, *BC*, *AD*, *BD*, und wende die §§. 83 und 60 an.

§. 89.

Aufgabe. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel auf dieser Linie zu errichten.

Fig. 62.



Gegeben:
Linie *MN* mit dem Punkte *A*.

Gesucht:
Perpendikel auf *MN* in *A*.

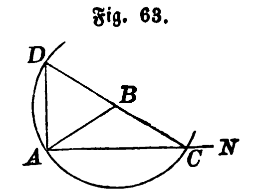
Construction. Man trage aus *A* auf *MN* die beiden gleichen Abschnitte *AB* und *AC* ab, und construire darauf aus *B* und *C* mit einerlei doch hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche sich in *D* schneiden. Zieht man nun *AD*, so ist diese Linie das gesuchte Perpendikel.

Der Beweis folgt, wenn man *BD* und *CD* zieht, aus §. 83.

§. 90.

Aufgabe. In dem Endpunkte einer gegebenen geraden Linie ein Perpendikel auf dieser Linie zu errichten.

Fig. 63.



Gegeben:
Linie *AN*.

Gesucht:
Perpendikel auf *AN* in *A*.

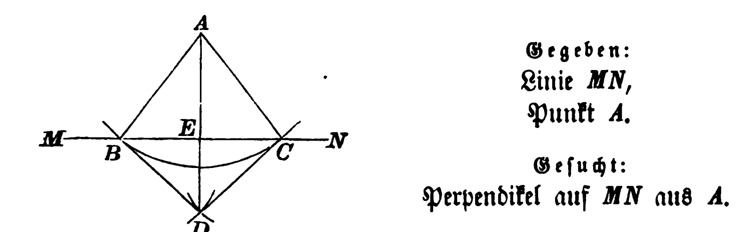
Construction. Aus einem beliebigen außerhalb *AN* angenommenen Punkte *B* construire man mit dem Halbmesser *BA* den Bogen *CAD*, ziehe *CB*, und verlängere diese Linie über *B* hinaus, bis sie den Bogen in *D* trifft. Zieht man nun *AD*, so ist diese Linie das gesuchte Perpendikel.

Der Beweis folgt aus §. 68.

§. 91.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte auf eine gegebene gerade Linie ein Perpendikel zu fällen.

Fig. 64.



Gegeben:
Linie *MN*,
Punkt *A*.

Gesucht:
Perpendikel auf *MN* aus *A*.

Construction. Man construire aus *A* mit einem beliebigen, jedoch hinreichend großen Halbmesser einen Bogen *BC*, welcher die Linie *MN* in *B* und *C* schneidet, und daraus aus *B* und *C* mit einerlei, jedoch gleichfalls hinreichend großem Halbmesser zwei Bögen, welche einander in *D* durchschneiden. Zieht man nun *AD*, so ist *AE* das gesuchte Perpendikel.

Der Beweis folgt, nachdem man *AB*, *AC*, *BD* und *CD* gezogen, aus den §§. 83 und 60.

Anmerkung. In den planimetrischen Zeichnungen werden diese drei letzten Aufgaben §§. 89—91 einfacher durch Hülfe eines hölzernen rechtwinkeligen Dreiecks gelöst, welches längs einem geraden Lineale geschoben wird.

Vierter Abschnitt.

Vom Viereck.

---

§. 92.

Erklärung. Ein **Viereck** ist ein durch vier sich schneidende gerade Linien umgrenzter Theil einer Ebene.

Das Viereck hat 4 Eckpunkte, welche paarweise einander gegenüberliegen. Ebenso 4 Seiten, welche paarweise einander gegenüberliegen, und 4 Winkel, welche paarweise einander gegenüberliegen.

§. 93.

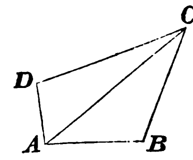
Erklärung. Unter einer **Diagonale** versteht man eine gerade Linie, welche zwei Eckpunkte einer Figur verbindet, ohne Seite der Figur zu sein.

Im Viereck sind zwei Diagonalen möglich.

§. 94.

Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Vierecks ist gleich 4 rechten Winkeln.

Fig. 65.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Viereck.

Folgerung:
$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 4\,\mathfrak{R}.$$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale *AC*, welche das Viereck in zwei Dreiecke *ABC* und *ADC* zerlegt. In diesen beiden Dreiecken ist nach §. 45

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 2\,\mathfrak{R},$$
$$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 2\,\mathfrak{R}$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen wird

$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 4\,\mathfrak{R},$$

w. z. b. w.

Das Parallelogramm.

§. 95.

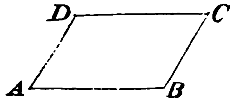
Erklärung. Unter einem Parallelogramm versteht man ein Viereck, in welchem jede zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Man gebraucht das Zeichen ▱ für Parallelogramm.

§. 96.

Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind jede zwei gegenüberliegende Winkel gleich groß.

Fig. 66.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Parallelogramm.

Folgerung:
$$\angle DAB = \angle DCB,$$
$$\angle ABC = \angle ADC.$$

Beweis. Nach §. 42 ist, wenn man *AD* wie Transversale ansieht,
$$\angle DAB + \angle ADC = 2\ \mathfrak{R},$$
und wenn man *DC* wie Transversale ansieht,
$$\angle ADC + \angle DCB = 2\ \mathfrak{R}.$$
Aus beiden Gleichungen folgt
$$\angle DAB + \angle ADC = \angle ADC + \angle DCB,$$
und daraus, indem man auf beiden Seiten $\angle ADC$ subtrahirt,
$$\angle DAB = \angle DCB,$$
w. z. b. w.

Auf dieselbe Weise hat man
$$\angle ABC + \angle DCB = 2\ \mathfrak{R},$$
und
$$\angle DCB + \angle ADC = 2\ \mathfrak{R}.$$
Folglich
$$\angle ABC + \angle DCB = \angle DCB + \angle ADC,$$
und daraus
$$\angle ABC = \angle ADC,$$
w. z. b. w.

Vierter Abschnitt.

Vom Viereck.

§. 92.

Erklärung. Ein Viereck ist ein durch vier sich schneidende gerade Linien umgrenzter Theil einer Ebene.

Das Viereck hat 4 Eckpunkte, welche paarweise einander gegenüberliegen. Ebenso 4 Seiten, welche paarweise einander gegenüberliegen, und 4 Winkel, welche paarweise einander gegenüberliegen.

§. 93.

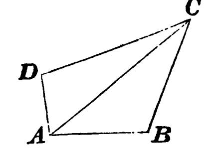
Erklärung. Unter einer Diagonale versteht man eine gerade Linie, welche zwei Eckpunkte einer Figur verbindet, ohne Seite der Figur zu sein.

Im Viereck sind zwei Diagonalen möglich.

§. 94.

Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Vierecks ist gleich 4 rechten Winkeln.

Fig. 65.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Viereck.

Folgerung:
$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 4 R.$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale *AC*, welche das Viereck in zwei Dreiecke *ABC* und *ADC* zerlegt. In diesen beiden Dreiecken ist nach §. 45

$$\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 2 R,$$
$$\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 2 R$$

und durch Addition dieser beiden Gleichungen wird

$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 4 R,$$

w. z. b. w.

Das Parallelogramm.

§. 95.

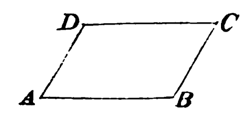
Erklärung. Unter einem Parallelogramm versteht man ein Viereck, in welchem jede zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Man gebraucht das Zeichen ▱ für Parallelogramm.

§. 96.

Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind jede zwei gegenüberliegende Winkel gleich groß.

Fig. 66.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Parallelogramm.

Folgerung:

$$\angle DAB = \angle DCB,$$
$$\angle ABC = \angle ADC.$$

Beweis. Nach §. 42 ist, wenn man *AD* wie Transversale ansieht,

$$\angle DAB + \angle ADC = 2\,\mathrm{R},$$

und wenn man *DC* wie Transversale ansieht,

$$\angle ADC + \angle DCB = 2\,\mathrm{R}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\angle DAB + \angle ADC = \angle ADC + \angle DCB,$$

und daraus, indem man auf beiden Seiten $\angle ADC$ subtrahirt,

$$\angle DAB = \angle DCB,$$

w. z. b. w.

Auf dieselbe Weise hat man

$$\angle ABC + \angle DCB = 2\,\mathrm{R},$$

und

$$\angle DCB + \angle ADC = 2\,\mathrm{R}.$$

Folglich

$$\angle ABC + \angle DCB = \angle DCB + \angle ADC,$$

und daraus

$$\angle ABC = \angle ADC,$$

w. z. b. w.

§. 97.

Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind jede zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß.

Fig. 67.

Voraussetzung:

ABCD ist ein Parallelogramm.

Folgerung:

$$AB = DC,$$
$$BC = AD.$$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale *AC*. Betrachtet man dieselbe wie Transversale, so hat man nach §. 40

$$\angle BAC = \angle ACD,$$
$$\angle BCA = \angle CAD,$$

und wenn man hiezu die identische Gleichung

$$AC = AC$$

nimmt, so folgt nach §. 56

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC,$$

und daraus nach §. 54

$$AB = DC,$$
$$BC = AD,$$

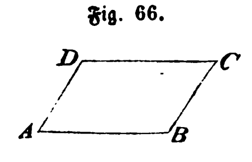
w. z. b. w.

§. 98.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck jede zwei gegenüberliegende Winkel gleich groß sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 96.)

Fig. 66.



Voraussetzung:

$$\angle DAB = \angle DCB,$$
$$\angle ABC = \angle ADC.$$

Folgerung:

ABCD ist ein Parallelogramm.

Beweis. Aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$\angle DAB = \angle DCB,$$
$$\angle ABC = \angle ADC$$

folgt durch Addition

$$\angle DAB + \angle ABC = \angle DCB + \angle ADC;$$

und da nach §. 94 die Summe der vier Winkel, welche in dieser Gleichung enthalten sind, 4 R beträgt, so muß

$$\angle DAB + \angle ABC = 2\ R$$

sein, woraus nach §. 39 folgt

$$BC \parallel AD.$$

Ebenso aus den beiden Gleichungen

$$\angle DAB = \angle DCB,$$
$$\angle ADC = \angle ABC$$

folgt durch Addition

$$\angle DAB + \angle ADC = \angle DCB + \angle ABC;$$

und deshalb muß aus demselben Grunde wie vorhin

$$\angle DAB + \angle ADC = 2\ R$$

sein, woraus nach §. 39 folgt

$$AB \parallel DC.$$

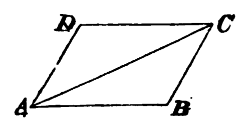
Die beiden Bedingungen $BC \parallel AD$ und $AB \parallel DC$ aber machen, nach §. 95, das Viereck $ABCD$ zu einem Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 99.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck jede zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 97.)

Fig. 67.



Voraussetzung:

$$AB = DC,$$
$$BC = AD.$$

Folgerung:

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale AC. Aus den beiden gegebenen Gleichungen

$$AB = DC,$$
$$BC = AD$$

mit Zuziehung der identischen Gleichung

$$AC = AC$$

folgt nach §. 83

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC;$$

und hieraus ist nach §. 54

$\angle BAC = \angle ACD$, mithin nach §. 37 $AB \parallel DC$;

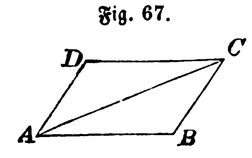
$\angle BCA = \angle CAD$, „ „ „ $BC \parallel AD$.

Die beiden Bedingungen $AB \parallel DC$ und $BC \parallel AD$ aber machen nach §. 95, das Viereck $ABCD$ zu einem Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 100.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß und parallel sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Fig. 67.



Voraussetzung:
$AB = DC$,
$AB \parallel DC$.

Folgerung:
$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale AC. Alsdann hat man

$AB = DC$ nach der Voraussetzung

$AC = AC$

$\angle BAC = \angle ACD$ nach §. 40,

folglich nach §. 60

$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$;

und hieraus ist nach §. 54

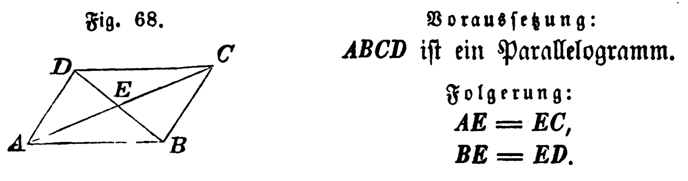
$\angle BCA = \angle CAD$, mithin nach §. 37 $BC \parallel AD$.

Die beiden Bedingungen $AB \parallel DC$ und $BC \parallel AD$ aber machen, nach §. 95, das Viereck $ABCD$ zu einem Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 101.

Lehrsatz. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander.

Fig. 68.



Voraussetzung:
$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Folgerung:
$AE = EC$,
$BE = ED$.

Beweis. Man hat

$$AB = DC \text{ nach §. 97,}$$
$$\angle EAB = \angle ECD \text{ nach §. 40,}$$
$$\angle EBA = \angle EDC \text{ „ §. 40,}$$

folglich nach §. 56

$$\triangle ABE \equiv \triangle DCE$$

und daraus

$$AE = EC,$$
$$BE = ED$$

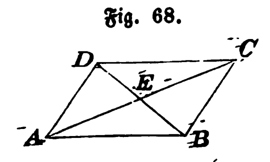
w. z. b. w.

§. 102.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck die beiden Diagonalen einander halbiren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 68.



Voraussetzung:

$$AE = EC,$$
$$BE = ED.$$

Folgerung:

$ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man hat

1) $AE = EC$, $BE = ED$, $\angle AEB = \angle DEC$,

2) $AE = EC$, $DE = EB$, $\angle AED = \angle BEC$ (§. 25.),

folglich nach §. 60

$\triangle AEB \equiv \triangle DEC$ $\qquad$ $\triangle AED \equiv \triangle BEC$

und daraus

$AB = DC$ $\qquad$ $AD = BC$.

Mithin ist nach §. 99 das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm, w. z. b. w.

§. 103.

Erklärung. Ein Parallelogramm wird ein Rechteck genannt, wenn ein Winkel desselben ein rechter Winkel ist.

Ein Parallelogramm wird ein Rhombus genannt, wenn zwei zusammenstoßende Seiten desselben gleich groß sind.

Ein Parallelogramm wird ein Quadrat genannt, wenn

ein Winkel desselben ein rechter Winkel ist und zwei zusammenstoßende Seiten gleich groß sind.

Weiter unten wird ein Rechteck, in welchem *AB* und *AD* zwei zusammenstoßende Seiten sind, abgekürzt durch ▭ *AB* . *AD*, und ein Quadrat über der Seite *AB* abgekürzt durch □ *AB* bezeichnet.

§. 104.

Zusatz. Im Rechteck sind alle vier Winkel rechte Winkel.

Im Rhombus sind alle vier Seiten gleich groß.

Im Quadrat sind alle vier Winkel rechte Winkel und alle Seiten gleich groß.

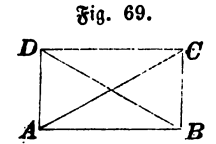
Dies folgt durch Zuziehung der oben nachgewiesenen allgemeinen Eigenschaften der Parallelogramme.

Anmerkung. Ein Rechteck, dessen zusammenstoßende Seiten ungleich sind, wird ein Oblongum, und ein Parallelogramm mit schiefen Winkeln, dessen zusammenstoßende Seiten ungleich sind, ein Rhomboid genannt. Diese Benennungen sind indeß seltener im Gebrauch.

§. 105.

Lehrsatz. In jedem Rechteck sind die beiden Diagonalen gleich groß.

Fig. 69.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Rechteck.

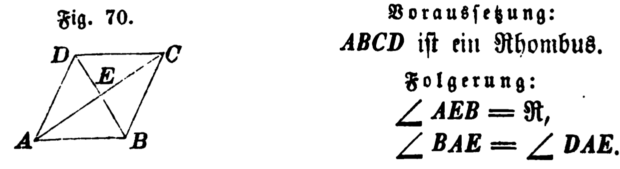
Folgerung:
$AC = BD$.

Der Beweis ergiebt sich durch Congruenz der beiden Dreiecke *ABC* und *ABD* nach §. 60.

§. 106.

Lehrsatz. In jedem Rhombus stehen die beiden Diagonalen auf einander rechtwinkelig, und halbiren die Winkel des Rhombus.

Fig. 70.



Voraussetzung:
ABCD ist ein Rhombus.

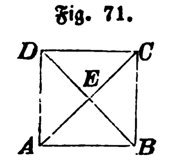
Folgerung:
$\angle AEB = R$,
$\angle BAE = \angle DAE$.

Der Beweis ergiebt sich durch die Eigenschaften des gleichschenkeligen Dreiecks *ABD* nach §. 69.

§. 107.

Zusatz. Im Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich groß, stehen auf einander rechtwinkelig, und halbiren die Winkel des Quadrats.

Fig. 71.



In dem Quadrat *ABCD* ist

$$AC = BD,$$
$$\angle AEB = \mathfrak{R},$$
$$\angle BAE = \angle DAE.$$

Das Trapez.

§. 108.

Erklärung. Unter einem Trapez versteht man ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel, und die anderen beiden Seiten nicht parallel sind.

Die beiden parallelen Seiten sind überdies ungleich lang, wegen §. 100.

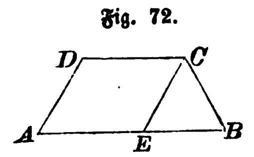
§. 109.

Erklärung. Ein Trapez wird ein gleichschenkeliges Trapez genannt, wenn die beiden nicht parallelen Seiten desselben gleich groß sind.

§. 110.

Lehrsatz. Im gleichschenkeligen Trapez sind die Winkel an jeder der beiden parallelen Seiten gleich groß.

Fig. 72.



Voraussetzung:

ABCD ist ein gleichschenkeliges Trapez.

Folgerung:

$$\angle DAB = \angle CBA,$$
$$\angle ADC = \angle BCD.$$

Beweis. Man ziehe $CE \parallel DA$. Alsdann ist $AECD$ ein Parallelogramm, in welchem man nach §. 97 hat

$$EC = AD.$$

Aber weil vermöge der Voraussetzung $AD = BC$ ist, so folgt weiter

$$EC = BC$$

d. h. das Dreieck EBC ist gleichschenkelig. Daraus ergiebt sich nach §. 61

$$\angle CEB = \angle CBE;$$

folglich, weil nach §. 41 $\angle DAB = \angle CEB$ ist,

$$\angle DAB = \angle CBA$$

w. z. b. w.

Ferner hat man nach §. 42

$$\angle DAB + \angle ADC = 2\ \mathfrak{R},$$
$$\angle CBA + \angle BCD = 2\ \mathfrak{R},$$

woraus folgt

$$\angle DAB + \angle ADC = \angle CBA + \angle BCD;$$

und wenn man von dieser Gleichung die so eben bewiesene Gleichung $\angle DAB = \angle CBA$ subtrahirt, so bleibt

$$\angle ADC = \angle BCD$$

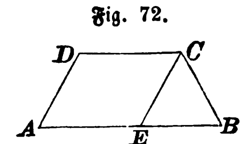
w. z. b. w.

§. 111.

Lehrsatz. Wenn in einem Trapez die Winkel an einer der beiden parallelen Seiten gleich groß sind, so ist das Trapez ein gleichschenkeliges.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 72.



Voraussetzung:
$\angle DAB = \angle CBA.$

Folgerung:
$ABCD$ ist ein gleichschenkeliges Trapez.

Beweis. Man ziehe $CE \parallel DA$. Alsdann ist nach §. 41 $\angle DAB = \angle CEB$, folglich vermöge der Voraussetzung

$$\angle CEB = \angle CBE,$$

und hieraus folgt nach §. 64, daß $\triangle\ EBC$ ein gleichschenkeliges Dreieck ist, d. h.

$$EC = BC.$$

Aber zugleich ist *AECD* ein Parallelogramm, in welchem nach §. 97 $EC = AD$ ist; folglich hat man auch

$$AD = BC,$$

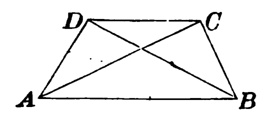
d. h. nach §. 109, das Trapez *ABCD* ist ein gleichschenkeliges Trapez, w. z. b. w.

Würde als Voraussetzung die Gleichung $\angle ADC = \angle BCD$ gegeben, so müßte man aus ihr durch ähnliche Schlüsse, wie in dem zweiten Theile des vorigen Beweises, zuvor die Gleichung $\angle DAB = \angle CBA$ ableiten.

§. 112.

Lehrsatz. Im gleichschenkeligen Trapez sind die beiden Diagonalen gleich groß.

Fig. 73.



Voraussetzung:
ABCD ist ein gleichschenkeliges Trapez.

Folgerung:
$AC = BD.$

Der Beweis ergiebt sich durch Congruenz der beiden Dreiecke *ABC* und *ABD* nach §. 60.

Inhaltsgleichheit der Figuren.

§. 113.

Erklärung. Zwei Figuren werden inhaltsgleich (oder kürzer gleich) genannt, wenn sie entweder congruent sind oder durch Addition oder Subtraction congruenter Figuren zusammengesetzt werden können.

So wenn z. B. eine Figur durch die Summe $a + b$ und eine andere durch die Summe $c + d$ gebildet wird, und man von den Theilen dieser Summen einzeln weiß, daß $a \equiv c$ und $b \equiv d$ ist, so sind die Figuren $a + b$ und $c + d$ inhaltsgleich.

Dasselbe gilt von den beiden Figuren $a - b$ und $c - d$.

Man schreibt $=$ für inhaltsgleich.

§. 114.

Erklärung. Wenn man in einem Dreieck oder Parallelogramm eine beliebige Seite, oder im Trapez eine der beiden parallelen Seiten als Grundlinie angenommen hat, so versteht man unter der Höhe im Dreieck ein Perpendikel aus der gegenüberliegenden Spitze auf die Grundlinie; im Parallelogramm oder Trapez dagegen ein Perpendikel aus einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seite auf die Grundlinie.

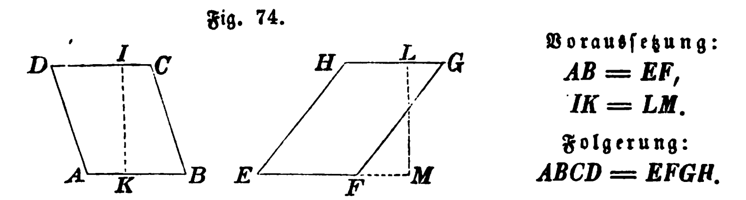
Der Perpendikel, welches die Höhe genannt wird, trifft entweder die Grundlinie selbst oder die Verlängerung derselben, weshalb man die Grundlinie immer sich hinreichend verlängert denken muß.

Im Parallelogramm und Trapez sind die verschiedenen Perpendikel, welche man als Höhen construiren kann, sämmtlich gleich groß, wegen §. 97. Denn je zwei derselben sind immer gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms.

§. 115.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

Fig. 74.

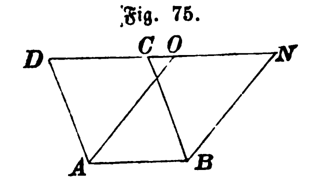


Voraussetzung:
$AB = EF$,
$IK = LM$.

Folgerung:
$ABCD = EFGH$.

Beweis. Man lege die beiden Parallelogramme *ABCD* und *EFGH* so auf einander, daß die Grundlinie *EF* auf die Grundlinie *AB* fällt, welches der Voraussetzung gemäß möglich ist. Alsdann werden, wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Höhen, die gegenüberliegenden Seiten *DC* und *HG*, Fig. 74, in eine und dieselbe gerade Linie fallen, z. B. in die Linie *DN*, Fig. 75, so daß das Parallelogramm *EFGH* die Lage *ABNO* annimmt.

Fig. 75.



In dem Trapez *ABND* ist nun

$$AD = BC \text{ nach §. 97,}$$
$$\angle ADO = \angle BCN \text{ nach §. 41,}$$
$$\angle AOD = \angle BNC \text{ nach §. 41,}$$

folglich nach §. 58

$$\triangle ADO \equiv \triangle BCN.$$

Subtrahirt man nun von dem Trapez *ABND* das Dreieck *BCN*, so bleibt das Parallelogramm *ABCD*. Subtrahirt man aber von demselben Trapez *ABND* das Dreieck *ADO*, so bleibt das Parallelogramm *ABNO*. Folglich ist nach §. 113

$$ABCD = ABNO,$$
$$\text{d. i. } ABCD = EFGH$$

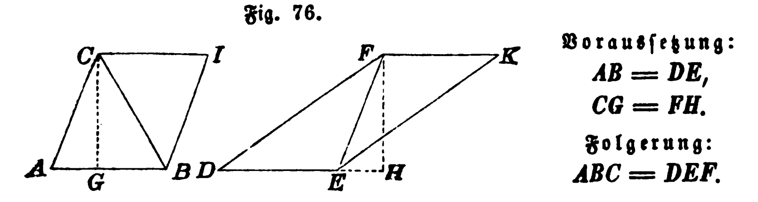
w. z. b. w.

Das Trapez *ABND* kann unter besonderen Voraussetzungen zu einem Parallelogramm oder einem gleichschenkeligen Trapez werden. In diesen beiden Fällen sind die gegebenen Parallelogramme congruent.

§. 116.

Lehrsatz. Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich.

Fig. 76.



Beweis. Man ergänze die gegebenen Dreiecke *ABC* und *DEF* zu den Parallelogrammen *ABIC* und *DEKF* von derselben Grundlinie und derselben Höhe. Alsdann ist nach dem vorigen Lehrsatze

$$ABIC = DEKF.$$

Aber *ABC* ist die Hälfte von *ABIC*, und *DEF* ist die Hälfte von *DEKF*; folglich hat man auch

$$ABC = DEF$$

w. z. b. w.

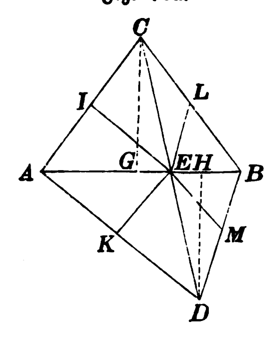
Nach diesem Lehrsatze kann man auch sagen:

> Dreiecke über einerlei Grundlinie, deren Spitzen in einer Parallele zu dieser Grundlinie liegen, sind inhaltsgleich.

Denn diese Dreiecke haben auch gleiche Höhen.

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz kann auch bewiesen werden, ohne daß man nöthig hat, die gegebenen Dreiecke zu Parallelogrammen zu ergänzen, und obwohl dieser Beweis etwas schwieriger ausfällt, so möge er doch noch hier folgen, da er besonders instructiv erscheint.

Fig. 76a.



Man lege die beiden gegebenen Dreiecke auf einerlei Grundlinie *AB*, Fig. 76a, aber auf verschiedene Seiten derselben. Das eine Dreieck sei *ABC* mit der Höhe *CG*, das andere Dreieck sei *ABD* mit der Höhe *DH*, und nach der Voraussetzung hat man

$$CG = DH.$$

Verbindet man die Spitzen der beiden Dreiecke durch die gerade Linie *CD*, welche die Grundlinie *AB* (oder deren Verlängerung) in *E* durchschneidet, so hat man

$$\triangle CGE \equiv \triangle DHE \text{ nach §. 58,}$$

woraus folgt

$$CE = DE.$$

Zieht man ferner aus *E* die vier Linien $EI \parallel AD$, $EK \parallel AC$, $EL \parallel BD$, $EM \parallel BC$, so erhält man vier Paar congruente Dreiecke

$$\triangle AEI \equiv \triangle AEK \text{ nach §. 56}$$
$$\triangle CEI \equiv \triangle DEK \;\; " \;\; "$$
$$\triangle CEL \equiv \triangle DEM \;\; " \;\; "$$
$$\triangle EBL \equiv \triangle EBM \;\; " \;\; "$$

aus deren Addition nach der Erklärung §. 113 folgt

$$\triangle ABC = \triangle ABD$$

w. z. b. w.

Wenn der Durchschnittspunkt *E* in die Verlängerung der Grundlinie *AB* fällt, so verwandelt sich die vorstehende Addition zum Theil in eine Subtraction und der Schluß bleibt unverändert.

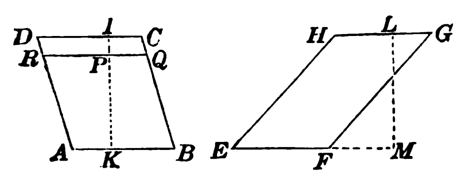
§. 117.

Lehrsatz. Inhaltsgleiche Parallelogramme von gleichen Grundlinien haben gleiche Höhen, und inhaltsgleiche Parallelogramme von gleichen Höhen haben gleiche Grundlinien.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 115.)

Erster Theil.

Fig. 77.



Voraussetzung:
$ABCD = EFGH$,
$AB = EF$.

Folgerung:
$IK = LM$.

Beweis. Gesetzt es seien die Höhen IK und LM ungleich, z. B. $IK > LM$. Alsdann trage man auf IK von K aus einen Abschnitt $KP = LM$ ab, und ziehe durch P die Linie $RQ \parallel AB$. Nun ist nach dem Lehrsatze §. 115

$$ABQR = EFGH.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$ABCD = EFGH,$$

folglich

$$ABQR = ABCD,$$

welche Gleichung einen Widerspruch enthält.

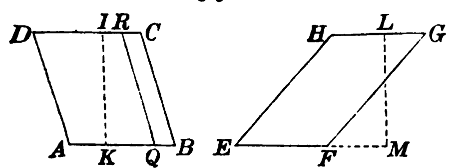
Der Widerspruch hört nur dann auf, wenn man setzt

$$IK = LM$$

w. z. b. w.

Zweiter Theil.

Fig. 78.



Voraussetzung:
$ABCD = EFGH$,
$IK = LM$.

Folgerung:
$AB = EF$.

Beweis. Gesetzt es seien die Grundlinien AB und EF ungleich, z. B. $AB > EF$. Alsdann trage man auf AB von A aus einen

Abschnitt $AQ = EF$ ab und ziehe durch Q die Linie $QR \parallel AD$. Nun ist nach dem Lehrsatze §. 115

$$AQRD = EFGH.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$ABCD = EFGH,$$

folglich

$$AQRD = ABCD,$$

welche Gleichung einen Widerspruch enthält.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn man setzt

$$AB = EF$$

w. z. b. w.

§. 118.

Zusatz. Inhaltsgleiche Dreiecke von gleichen Grundlinien haben gleiche Höhen, und inhaltsgleiche Dreiecke von gleichen Höhen haben gleiche Grundlinien.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 116.)

Denn man ergänze die gegebenen Dreiecke, wie im §. **116**, zu Parallelogrammen von derselben Grundlinie und derselben Höhe; alsdann ergiebt sich das Weitere unmittelbar aus dem vorigen Lehrsatze.

Man kann auch sagen (vgl. §. 116):

> Wenn inhaltsgleiche Dreiecke über einerlei Grundlinie enthalten sind, so liegen ihre Spitzen in einer Parallele zu dieser Grundlinie.

§. 119.

Erklärung. Eine gegebene Figur in eine neue Figur verwandeln heißt eine neue Figur construiren, welche der gegebenen inhaltsgleich ist.

So kann man, nach §. 115, jedes gegebene Parallelogramm in ein beliebiges neues Parallelogramm von derselben Grundlinie und Höhe, also z. B. auch in einen Rhombus oder in ein Rechteck verwandeln.

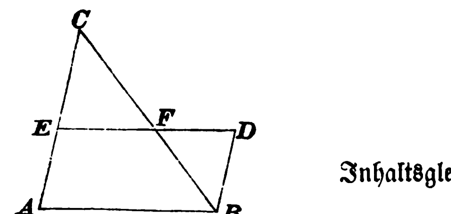
Ebenso kann man, nach §. 116, jedes gegebene Dreieck in ein neues Dreieck von derselben Grundlinie und Höhe, also z. B. auch in ein gleichschenkeliges oder ein rechtwinkeliges verwandeln.

Die Auflösung dieser Aufgaben wird, ihrer Einfachheit wegen, hier übergangen.

§. 120.

Aufgabe Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm von derselben Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 79.



Gegeben:

△ *ABC*.

Gesucht:

Inhaltsgleiches ▱ über *AB*.

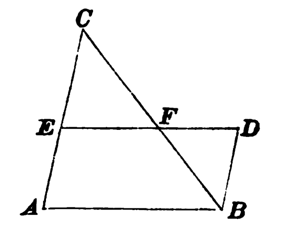
Construction. Man halbire *AC* in *E*, und ziehe *ED* ∥ *AB* und *BD* ∥ *AE*. Alsdann ist *ABDE* das gesuchte Parallelogramm, welches dem Dreieck *ABC* inhaltsgleich ist.

Der Beweis folgt durch Congruenz der beiden Dreiecke *ECF* und *DBF*.

Wenn man *AC* wie die Grundlinie des gegebenen Dreiecks *ABC* ansieht, so löst dieselbe Construction zugleich die Aufgabe: Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm von derselben Höhe zu verwandeln.

§. 121.

Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck von derselben Grundlinie zu verwandeln.



Gegeben:

▱ *ABDE*.

Gesucht:

Inhaltsgleiches △ über *AB*.

Construction. Man verlängere *AE* über *E* hinaus nach *C*, so daß *EC* = *AE* wird, und ziehe *BC*. Alsdann ist *ABC* das gesuchte Dreieck, welches dem gegebenen Parallelogramm *ABDE* inhaltsgleich ist.

Der Beweis wie im vorigen Paragraphen.

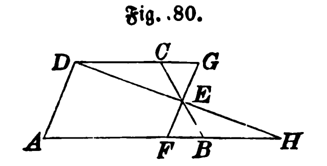
Wenn man *AE* wie Grundlinie des gegebenen Parallelogramms *ABDE* ansieht, so löst dieselbe Construction zugleich die Aufgabe:

Ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck von derselben Höhe zu verwandeln.

§. 122.

Aufgabe. Ein gegebenes Trapez in ein Dreieck oder in ein Parallelogramm von derselben Höhe zu verwandeln.

Fig. 80.



Gegeben:
Trapez *ABCD*.
Gesucht:
Inhaltsgleiches △ oder ▱ von derselben Höhe.

Construction. 1) Man halbire eine der nicht parallelen Seiten des Trapez, *BC*, in *E*, ziehe *DE* und verlängere diese Linie bis zu ihrem Durchschnitt mit der verlängerten *AB* in *H*. Alsdann ist *AHD* das gesuchte Dreieck.

Der Beweis folgt aus der Congruenz der Dreiecke *DEC* und *HEB*.

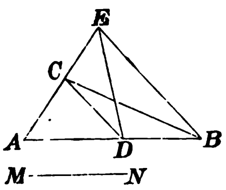
2) Man halbire eine der nicht parallelen Seiten des Trapez, *BC*, in *E* und ziehe durch *E* eine Linie *FG* ‖ *AD*, welche die Seite *AB* in *F* und die verlängerte *DC* in *G* trifft. Alsdann ist *AFGD* das gesuchte Parallelogramm.

Der Beweis folgt aus der Congruenz der Dreiecke *CEG* und *BEF*.

§. 123.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes Dreieck über einer gegebenen neuen Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 81.



Gegeben:
△ *ABC*,
Linie *MN*.

Gesucht:
Inhaltsgleiches △ über *MN*.

Construction. Die gegebene neue Grundlinie *MN* sei kleiner als die Grundlinie *AB* des gegebenen Dreiecks.

Man trage die Grundlinie *MN* auf *AB* von *A* aus bis *D* ab, und ziehe *CD*. Alsdann hat das Dreieck *ADC* die verlangte Grundlinie, ist jedoch um den Inhalt des Dreiecks *DBC* zu klein geworden. Damit dieser Inhalt wieder hinzukomme, ziehe man durch *B* eine Linie *BE* ∥ *DC* bis zu dem Punkte *E*, wo sie die verlängerte *AC* trifft, und ziehe endlich *DE*. Alsdann ist *ADE* das gesuchte Dreieck.

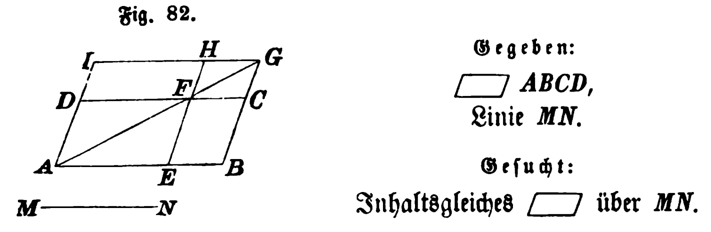
Der Beweis folgt aus der Inhaltsgleichheit der beiden Dreiecke *DBC* und *DEC*, deren Grundlinie *DC* gemeinschaftlich ist und deren Spitzen *B* und *E* in einer Parallele zu dieser Grundlinie liegen, nach §. 116.

Wenn die gegebene neue Grundlinie größer als die Grundlinie des gegebenen Dreiecks ist, so kann man in derselben Figur △ *ADE* wie gegeben und △ *ABC* wie gesucht ansehen.

§. 124.

Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes Parallelogramm über einer gegebenen neuen Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 82.



Gegeben:

▱ *ABCD*,

Linie *MN*.

Gesucht:

Inhaltsgleiches ▱ über *MN*.

Construction. Die gegebene neue Grundlinie *MN* sei kleiner als die Grundlinie *AB* des gegebenen Parallelogramms.

Man trage die Grundlinie *MN* auf *AB* von *A* aus bis *E* ab, und ziehe *EF* ∥ *AD*. Alsdann hat das Parallelogramm *AEFD* die verlangte Grundlinie, ist jedoch um den Inhalt des Parallelogramms *EBCF* zu klein geworden. Damit dieser Inhalt wieder hinzukomme, ziehe man die Diagonale *AF*, verlängere dieselbe, bis sie in *G* mit der verlängerten *BC* zusammentrifft, und ziehe durch *G* eine Parallele zu *BA*, welche von der verlängerten *EF* in *H* und von der verlängerten *AD* in *I* getroffen wird. Alsdann ist *AEHI* das gesuchte Parallelogramm.

Der Beweis folgt aus der Inhaltsgleichheit der beiden Parallelogramme *EBCF* und *DFHI*, welche sich ergiebt, wenn man von

$$\triangle ABG \equiv \triangle AIG$$

subtrahirt

$$\triangle AEF \equiv \triangle ADF$$

$$\text{und } \triangle FCG \equiv \triangle FHG$$

und dabei §. 113 anwendet.

Wenn die gegebene neue Grundlinie größer als die Grundlinie des gegebenen Parallelogramms ist, so kann man in derselben Figur ▱ *AEHI* wie gegeben und *ABCD* wie gesucht ansehen.

§. 125.

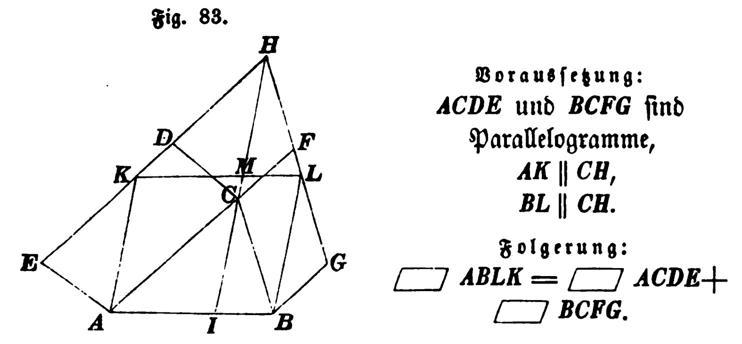
Zusatz. **Wenn man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt einer Diagonale zwei gerade Linien parallel mit den Seiten des Parallelogramms zieht, so sind diejenigen beiden neu entstehenden Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, inhaltsgleich.**

So sind in dem Parallelogramme *ABGI*, Fig. 82, durch den Punkt *F* der Diagonale *AG* die beiden geraden Linien $DC \parallel AB$ und $EH \parallel AI$ gezogen und dadurch die beiden inhaltsgleichen Parallelogramme *EBCF* und *DFHI* entstanden.

§. 126.

Lehrsatz des Pappus. **Wenn man über zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks, als Grundlinien, Parallelogramme construirt, die gegenüberliegenden Seiten dieser Parallelogramme bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, diesen Punkt mit der Spitze des Dreiecks durch eine gerade Linie verbindet, mit dieser Linie aus den Endpunkten der Grundlinie des Dreiecks Parallelen zieht, bis dahin, wo dieselben die gegenüberliegenden Seiten der Parallelogramme treffen, und endlich die zuletzt genannten Punkte durch eine gerade Linie verbindet: so entsteht über der Grundlinie des gegebenen Dreiecks ein Parallelogramm, welches der Summe der beiden über den Seiten dieses Dreiecks construirten Parallelogramme inhaltsgleich ist.**

Fig. 83.



Voraussetzung:
ACDE und *BCFG* sind Parallelogramme,
$AK \parallel CH$,
$BL \parallel CH$.

Folgerung:
▱ *ABLK* = ▱ *ACDE* + ▱ *BCFG*.

Beweis. Die Vierecke *ACHK* und *BCHL* sind in Folge der Voraussetzung Parallelogramme, folglich hat man nach §. 97

$$AK = CH,\ BL = CH,$$

woraus

$$AK = BL;$$

und da ferner, in Folge der Voraussetzung, nach §. 33

$$AK \parallel BL$$

ist, so ist nach §. 100 das Viereck *ABLK* ein Parallelogramm.

Ferner ist nach §. 115

$$AIMK = ACHK = ACDE,$$
$$BIML = BCHL = BCFG$$

woraus durch Addition folgt

$$ABLK = ACDE + BCFG$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Diesen Satz hat Pappus von Alexandria gegeben, welcher um das Jahr 400 nach Chr. Geb. lebte. Er ist in einem Werke des Pappus enthalten, welches für uns besonders deshalb große Wichtigkeit hat, weil es uns zugleich von einer Anzahl mathematischer Schriften der Griechen, die seitdem verloren sind, ausführliche Nachricht giebt.

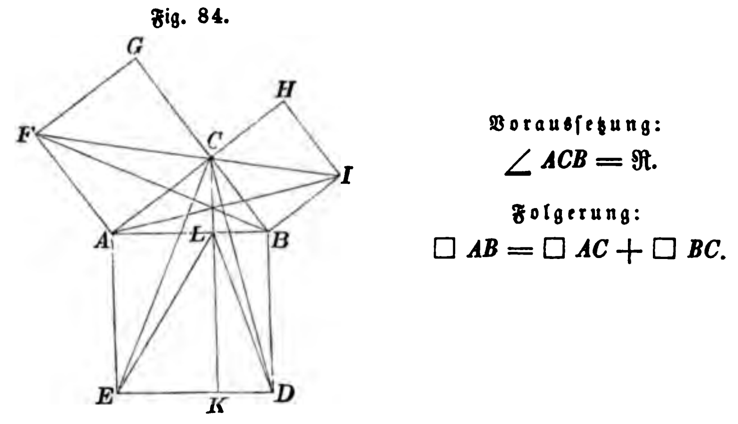
Wie man von dem vorstehenden Lehrsatze Gebrauch machen kann, um zwei gegebene Parallelogramme zu addiren oder zu subtrahiren, so daß die Summe oder Differenz wieder ein Parallelogramm wird, leuchtet von selbst ein.

§. 127.

Lehrsatz des Pythagoras. Das Quadrat über der

Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist inhaltsgleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Fig. 84.



Voraussetzung:
$\angle ACB = \Re$.

Folgerung:
$\square AB = \square AC + \square BC$.

Beweis. Man ziehe aus dem Scheitelpunkte C des rechten Winkels die gerade Linie $CK \parallel AE$, und beweise alsdann, daß 1) das Rechteck $ALKE = \square AC$, und 2) das Rechteck $BLKD = \square BC$ ist.

Um das Erste zu beweisen, ziehe man die Diagonalen EL und FC, und die Hülfslinien EC und FB. Man hat alsdann

$AC = AF$ als Quadratseiten,
$AE = AB$ " "
$\angle CAE = \angle FAB = \Re + \angle CAB$,

folglich ist nach §. 60

$$\triangle CAE \equiv \triangle FAB.$$

Ferner ist nach §. 116

$$\triangle CAE = \triangle LAE, \quad \triangle FAB = \triangle FAC,$$

folglich auch

$$\triangle LAE = \triangle FAC.$$

Endlich ist

$$\triangle LAE = \tfrac{1}{2} ALKE, \quad \triangle FAC = \tfrac{1}{2} \square AC,$$

folglich

$$ALKE = \square AC. \qquad (1.)$$

Um das Zweite zu beweisen, ziehe man ebenso die Diagonalen DL und IC, und die Hülfslinien DC und IA. Man hat alsdann

$BC = BI$ als Quadratseiten,
$BD = BA$ " "
$\angle CBD = \angle IBA = \Re + \angle CBA$,

folglich nach §. 60

$$\triangle CBD \equiv \triangle IBA.$$

Ferner ist nach §. 116

$$\triangle CBD = \triangle LBD, \qquad \triangle IBA = \triangle IBC,$$

folglich auch

$$\triangle LBD = \triangle IBC.$$

Endlich ist

$$\triangle LBD = \tfrac{1}{2} BLKD, \qquad \triangle IBC = \tfrac{1}{2} \square BC,$$

folglich

$$BLKD = \square BC. \qquad (2.)$$

Addirt man nun die Gleichungen (1) und (2), so erhält man

$$\square AB = \square AC + \square BC$$

w. z. b. w.

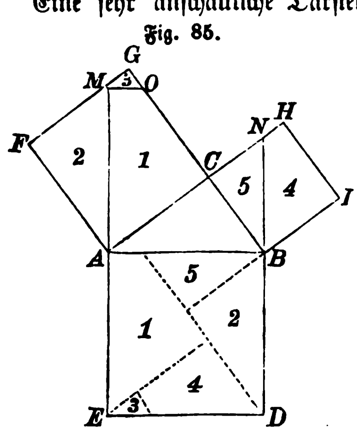
Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz wird dem Pythagoras zugeschrieben, welcher um 580 vor Chr. Geb. zu Samos geboren wurde und zu Kroton in Unter-Italien eine berühmte philosophische Schule gründete. Es wird erzählt, daß Pythagoras aus Dank für seine Erfindung den Göttern eine Hekatombe zum Opfer gebracht habe; doch widerspricht dieser Erzählung der Umstand, daß die Pythagoreer, als Anhänger der Lehre von der Seelenwanderung, eine Tödtung von Thieren sich nicht erlaubten. Auch der Satz von der Winkelsumme der Dreiecks (§. 45) wird dem Pythagoras zugeschrieben, der überhaupt auf das Studium der Mathematik großen Werth legte. Nach ihm wird die bekannte quadratförmige Anordnung des Ein-mal-Eins die Pythagoreische Rechentafel genannt. Unsere neun Ziffern und deren Gebrauch beim Zahlenschreiben sollen ihm gleichfalls bekannt gewesen sein; vielleicht hatte er sie auf seiner Reise nach Indien, woher diese Ziffern stammen, kennen gelernt; doch sind sie sonst nirgends bei den Griechen nachweisbar in den Gebrauch gekommen. Endlich lehrte schon Pythagoras, so weit man aus den dunkelen Berichten seiner Schüler schließen kann, die Bewegung der Erde um die Sonne; eine Lehre, die indessen von Aristoteles verworfen wurde, bis erst Copernicus berufen war, sie wieder zu einem Fundamentalsatze der Astronomie zu erheben.

Wie Pythagoras den nach ihm benannten Lehrsatz bewiesen hat, ist uns unbekannt. Der oben gegebene Beweis ist derselbe, welchen Euklides in seinen Elementen mittheilt. Einen zweiten Beweis

kann man sogleich aus dem Lehrsatze des Pappus §. 126 ableiten. Denn nimmt man in Figur 83 den Winkel *ACB* gleich einem rechten Winkel und die Figuren *ACDE* und *BCFG* als Quadrate an, so läßt sich leicht beweisen, daß auch *ABLK* ein Quadrat wird, und daraus folgt alsdann sogleich der zu beweisende Satz.

Eine sehr anschauliche Darstellung des Pythagoreischen Lehrsatzes ergiebt sich auf folgende Weise. Man ziehe, Fig. 85, $AM \perp AB$, $BN \perp AB$ und $MO \parallel AB$. Diese Linien zerlegen die Quadrate der beiden Katheten in die fünf mit 1, 2, 3, 4, 5 bezeichneten Theile. Wenn man nun diese fünf Theile aus einander nimmt und in der durch Punkte angedeuteten Weise in *ABDE* wieder zusammensetzt, so decken sie genau das Quadrat der Hypotenuse.

Fig. 85.



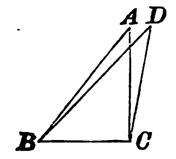
Wie man von dem Lehrsatze des Pythagoras Gebrauch machen kann, um zwei gegebene Quadrate zu addiren, oder zu subtrahiren, so daß die Summe oder Differenz wieder ein Quadrat wird, leuchtet von selbst ein.

§. 128.

Lehrsatz. **Wenn in einem Dreiecke das Quadrat über einer Seite inhaltsgleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten ist, so ist das Dreieck ein rechtwinkeliges.**

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)





Voraussetzung:

$\square\, AB = \square\, AC + \square\, BC.$

Folgerung:

$\angle\, ACB = \mathfrak{R}.$

Beweis. Gesetzt der Winkel *ACB* sei nicht ein rechter Winkel, sondern z. B. $\angle ACB < R$. Man errichte in *C* auf *BC* ein Perpendikel *CD*, mache $CD = CA$ und ziehe *BD*. Alsdann ist *DCB* ein in *C* rechtwinkeliges Dreieck, in welchem man nach dem vorigen Lehrsatze hat

$$\square DB = \square DC + \square BC.$$

Ferner ist nach der Voraussetzung

$$\square AB = \square AC + \square BC,$$

und aus beiden Gleichungen folgt, wegen $DC = AC$,

$$\square DB = \square AB,$$

mithin auch

$$DB = AB.$$

Wenn man aber auf die beiden Dreiecke *DBC* und *ABC* den Lehrsatz §. 81 anwendet, so erhält man

$$DB > AB$$

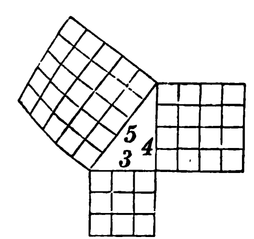
und dieses widerspricht der vorigen Gleichung.

Ein Widerspruch von derselben Art würde zum Vorschein gekommen sein, wenn man $\angle ACB > R$ angenommen hätte.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn $\angle ACB = R$ ist, w. z. b. w.

Beispiel. Wenn die Seiten eines Dreiecks in einer beliebigen Längen-Einheit durch die Zahlen 3, 4, 5 ausgedrückt werden, so ist das Dreieck ein rechtwinkeliges. Denn construirt man die Quadrate über den drei Seiten und zerlegt dieselben, wie in Fig. 87, in kleine Quadrate, welche die Längen-Einheit zur Seite haben, so sind in den drei Quadraten der Reihe nach 9, 16, 25 kleine Quadrate enthalten; und da $9 + 16 = 25$ ist, so geschieht damit dem vorstehenden Lehrsatze Genüge.

Fig. 87.

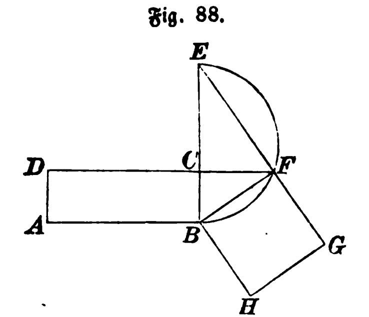


Statt der drei Zahlen 3, 4, 5 kann man auch annehmen 5, 12, 13; oder 8, 15, 17; oder 20, 21, 29; und viele andere. Solche rechtwinkeligen Dreiecke, deren Seiten sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen, nennt man vorzugsweise Pythagoreische Dreiecke.

§. 129.

Aufgabe. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 88.



Gegeben:
Rechteck *ABCD*.

Gesucht:
Inhaltsgleiches Quadrat.

Construction. Man verlängere die kleinere Seite *BC* des gegebenen Rechteckes über *C* hinaus nach *E*, so daß *BE* = *AB* wird, construire über *BE* als Durchmesser einen Halbkreis, verlängere *DC* über *C* hinaus, bis dieser Halbkreis in *F* getroffen wird, ziehe *BF*, und construire über *BF* als Seite das Quadrat *BFGH*. Alsdann ist dieses Quadrat inhaltsgleich dem gegebenen Rechteck *ABCD*.

Zum Beweise ziehe man *EF*. Dann ist *BFGH* Quadrat über einer Kathete des rechtwinkeligen Dreiecks *EBF*, und das Weitere folgt aus §. 127.

Anmerkung. Durch diese Aufgabe, mit Zuziehung früherer Aufgaben, ist man im Stande, jedes gegebene Dreieck oder Viereck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fünfter Abschnitt.

Von den Polygonen.

---

§. 130.

Erklärung. Ein Polygon oder Vieleck ist ein durch beliebig viele sich schneidende gerade Linien umgrenzter Theil einer Ebene.

Gewöhnlich schließt man das Dreieck, häufig auch das Viereck von den Polygonen aus. Doch gelten die meisten Eigenschaften der Polygone auch von den Vierecken und Dreiecken.

Ein Polygon hat eben so viel Eckpunkte wie Seiten. Und da in jedem Eckpunkte des Polygons zwei daselbst zusammenstoßende Seiten einen Winkel bilden, so hat ein Polygon auch eben so viel Winkel wie Seiten.

§. 131.

Lehrsatz. In einem Polygon von n Seiten lassen sich $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ Diagonalen ziehen.

Beweis. Wenn man zuerst aus Einem Eckpunkte des Polygons alle möglichen Diagonalen zieht, so fallen 3 Punkte hinweg, nach denen man keine Diagonalen ziehen kann; nämlich der Punkt selbst, aus welchem die Diagonalen gezogen werden, und die beiden benachbarten Eckpunkte des Polygons. Also bleiben nur $n - 3$ Eckpunkte übrig, nach denen man Diagonalen ziehen kann, oder die Anzahl der aus Einem Eckpunkte des Polygons möglichen Diagonalen beträgt $n - 3$.

Werden nun aus jedem der n Eckpunkte alle möglichen Diagonalen gezogen, so wiederholt sich die vorige Anzahl n mal, oder man erhält $n \cdot (n - 3)$. Aber in dieser Aufzählung ist jede Diagonale zweimal gezählt, nämlich sowohl von ihrem einen Endpunkte als von ihrem anderen Endpunkte aus. Also beträgt die Anzahl der möglichen Diagonalen nur $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, w. z. b. w.

Beispiel. Die Anzahl der möglichen Diagonalen im Viereck beträgt 2, im Fünfeck 5, im Sechseck 9, ꝛc.

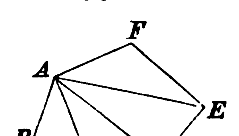
Diese Diagonalen können, jede einzeln genommen, entweder ganz innerhalb, oder ganz außerhalb, oder zum Theil innerhalb und zum Theil außerhalb der Fläche der Figur fallen.

§. 132.

Lehrsatz. Um ein gegebenes Polygon von n Seiten in Dreiecke zu zerlegen, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygons zusammenfallen, müssen $n - 3$ Diagonalen gezogen werden.

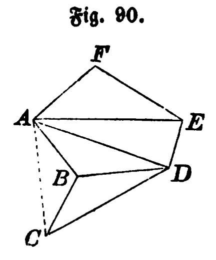
Beweis. Wenn man aus Einem Eckpunkte des Polygons alle möglichen Diagonalen zieht, so beträgt die Anzahl dieser Diagonalen $n - 3$ (s. den vorigen Beweis). Liegen nun alle diese Diagonalen innerhalb der Fläche des Polygons, wie in Fig. 89, *AC*, *AD* und *AE*, so wird durch dieselben das Polygon in lauter Dreiecke zerlegt, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygons zusammenfallen; folglich ist für diesen Fall der Lehrsatz bewiesen.

Fig. 89.



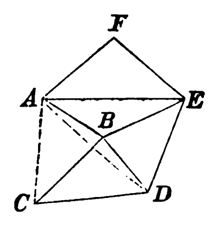
Liegt eine der Diagonalen nicht innerhalb der Fläche des Polygons, wie z. B. *AC* in Fig. 90, so kann man sie weglassen und statt derselben in dem entstandenen Viereck *ABCD* aus einem anderen Eckpunkte, *B* eine Diagonale, *BD*, ziehen, welche innerhalb der Fläche dieses Vierecks liegt. Also bleibt die Anzahl der Diagonalen, welche das Polygon in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygons zusammenfallen, so groß wie vorhin.

Fig. 90.



Liegen zwei auf einander folgende Diagonalen nicht innerhalb der Fläche des Polygons, wie z. B. *AC* und *AD*, Fig. 91, so kann man sie beide weglassen und statt derselben in dem entstandenen Fünfeck *ABCDE* zwei andere Diagonalen, *BD* und *BE*, ziehen, welche innerhalb der Fläche dieses Fünfecks liegen. Also bleibt wieder die Anzahl der Diagonalen, welche das Polygon in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygons zusammenfallen, so groß wie vorhin.

Fig. 91.



So kann man fortfahren, wenn mehr als zwei auf einander folgende Diagonalen nicht innerhalb der Fläche des Polygons fallen, und gelangt allgemein zu dem Schlusse, daß die Anzahl der erforderlichen Diagonalen immer $n - 3$ beträgt, w. z. b. w.

§. 133.

Lehrsatz. Die Anzahl der Dreiecke, in welche ein gegebenes Polygon von n Seiten zerlegt werden kann und deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygons zusammenfallen, beträgt $n - 2$.

Beweis. Wenn man die Diagonalen des vorigen Paragraphen in der gehörigen Reihefolge zieht, so schneidet jede Diagonale Ein Dreieck von dem Polygon ab: nur die letzte Diagonale, als Diagonale eines Vierecks, liefert zwei Dreiecke. Also ist die Anzahl der entstandenen Dreiecke um Eins größer als die Anzahl der Diagonalen. Da nun die Anzahl dieser Diagonalen $n-3$ war, so beträgt die Anzahl der entstandenen Dreiecke $n-2$, w. z. b. w.

Beispiel. So zerlegt man also

ein	Viereck	durch	1	Diagonalen	in	2 Dreiecke,
„	Fünfeck	„	2	„	„	3 „
„	Sechseck	„	3	„	„	4 „
ꝛc.						

§. 134.

Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines Polygons beträgt so viel mal zwei rechte Winkel, wie das Polygon Seiten hat, weniger vier rechte Winkel.

Oder wenn man in einem Polygon von n Seiten die Summe aller Winkel mit S bezeichnet, so ist

$$S = 2\,n\,\mathfrak{R} - 4\,\mathfrak{R}.$$

Beweis. Das Polygon von n Seiten kann nach dem vorigen Paragraph durch Diagonalen in $n - 2$ Dreiecke zerlegt werden, deren Eckpunkte mit den Eckpunkten des Polygons zusammenfallen. In jedem dieser Dreiecke beträgt nach §. 45 die Summe der Winkel $2\,\mathfrak{R}$. Also muß die Summe aller Winkel des Polygons, oder S, so viel mal $2\,\mathfrak{R}$ betragen, wie das Polygon Dreiecke enthält; oder es ist

$$S = (n - 2) \,.\, 2\,\mathfrak{R},$$

woraus durch weitere Entwickelung folgt

$$S = 2\,n\,\mathfrak{R} - 4\,\mathfrak{R},$$

w. z. b. w.

Beispiel. Die Summe aller Winkel beträgt im Dreieck 2 R, im Viereck 4 R, im Fünfeck 6 R, im Sechseck 8 R, 2c.

§. 135.

Zusatz. Jedes Polygon hat wenigstens drei hohle Winkel.

Denn sollte ein Polygon von n Seiten nur 2 hohle Winkel haben, so müßte es $n - 2$ erhabene Winkel enthalten; und da ein erhabener Winkel größer als 2 R ist, so würde die Summe dieser erhabenen Winkel schon mehr als $(n - 2) . 2$ R, d. i. $2\,n$ R $-$ 4 R betragen, was dem vorigen Paragraph widerspricht.

§. 136.

Erklärung. Unter einem regelmäßigen oder regulären Polygon versteht man ein Polygon, dessen Seiten gleich groß und dessen Winkel gleich groß sind.

Unter den Dreiecken das gleichseitige Dreieck, und unter den Vierecken das Quadrat können demnach zu den regelmäßigen Polygonen gezählt werden.

§. 137.

Lehrsatz. Jeder Polygonwinkel in einem regelmäßigen Polygon von n Seiten beträgt zwei rechte Winkel weniger $\frac{4}{n}$ R.

Oder wenn man den Polygonwinkel mit W bezeichnet, so ist

$$W = 2\,\text{R} - \frac{4}{n}\,\text{R}.$$

Der Beweis ergiebt sich, wenn man die Summe aller Winkel oder S (§. 134), durch die Anzahl dieser Winkel, oder n, dividirt.

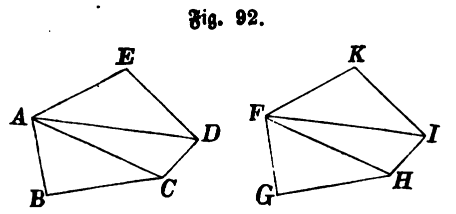
Beispiel. Jeder Polygonwinkel beträgt

im	regelmäßigen	Dreieck	60°,
„	„	Viereck	90°,
„	„	Fünfeck	108°,
„	„	Sechseck	120°
		2c.	

§. 138.

Lehrsatz. Congruente Polygone werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in congruente Dreiecke zerlegt.

Fig. 92.



Voraussetzung:
$ABCDE \equiv FGHIK$.

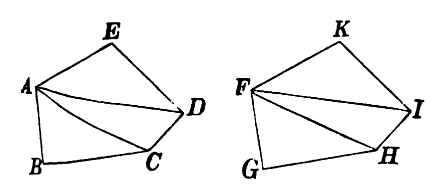
Folgerung:
$\triangle ABC \equiv \triangle FGH$,
$\triangle ACD \equiv \triangle FHI$,
$\triangle ADE \equiv \triangle FIK$.

Beweis. Da die Polygone *ABCDE* und *FGHIK* als congruent vorausgesetzt werden, so kann man sie so auf einander legen, daß sie sich vollständig decken. Alsdann werden auch die gleichliegenden Eckpunkte beider Polygone zusammenfallen, folglich auch (§. 9) die übereinstimmend gezogenen Diagonalen *AC* und *FH*, *AD* und *FI*; und mithin decken sich auch die Dreiecke *ABC* und *FGH*, *ACD* und *FHI*, *ADE* und *FIK*, d. h. diese Dreiecke sind paarweise congruent, w. z. b. w.

§. 139.

Lehrsatz. Polygone sind congruent, wenn sie aus congruenten Dreiecken auf übereinstimmende Weise zusammengesetzt sind.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:
$\triangle ABC \equiv \triangle FGH$,
$\triangle ACD \equiv \triangle FHI$,
$\triangle ADE \equiv \triangle FIK$.

Folgerung:
$ABCDE \equiv FGHIK$.

Beweis. Man lege die beiden Polygone *ABCDE* und *FGHIK* so auf einander, daß das Dreieck *FGH* auf *ABC* fällt, welches möglich ist, da beide Dreiecke nach der Voraussetzung congruent sind. Alsdann sind, wegen der übereinstimmenden Zusammensetzung der beiden Polygone, die zusammenfallenden Punkte *A* und *F*, *C* und *H* zugleich auch gleichliegende Eckpunkte der beiden folgenden congruenten Dreiecke *ACD* und *FHI*; folglich wird auch das Dreieck *FHI* auf *ACD* fallen. Ferner sind, wegen der übereinstimmenden Zusammensetzung der beiden Polygone, die jetzt zusammenfallenden Punkte *A* und *F*, *D* und *I* zugleich auch gleichliegende Eckpunkte

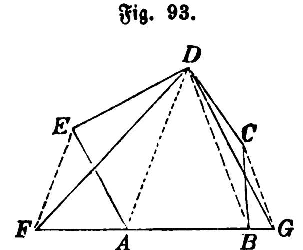
der beiden folgenden congruenten Dreiecke *ADE* und *FIK*; folglich wird auch das Dreieck *FIK* und *ADE* fallen. Ebenso würde man fortfahren, wenn die Reihe der Dreiecke noch größer wäre. Man gelangt mithin allgemein zu dem Schlusse, daß die beiden vorliegenden Polygone vollständig zusammenfallen, also congruent sind, w. z. b. w.

Anmerkung. Durch diesen Lehrsatz ist man immer im Stande, die Congruenz zweier Polygone auf die Congruenz derjenigen Dreiecke zurückzuführen, aus welchen die Polygone zusammengesetzt werden können. Aus diesem Grunde ist eine weitere Betrachtung der Congruenz der Polygone unnöthig.

§. 140.

Aufgabe. Ein gegebenes Polygon in ein Dreieck zu verwandeln.

Fig. 93.



Gegeben:
Polygon *ABCDE*.

Gesucht:
Inhaltsgleiches △.

Construction. In dem gegebenen Fünfeck *ABCDE* ziehe man eine Diagonale *AD*, welche das Dreieck *ADE* abschneidet; lege durch die gegenüberliegende Spitze *E* dieses Dreiecks eine Parallele zu *AD*, mache dieselbe so lang, bis sie die Verlängerung der anliegenden Seite *BA* in *F* trifft, und ziehe *DF*. Alsdann ist aus dem Fünfeck *ABCDE* das inhaltsgleiche Viereck *FBCD* geworden.

Ferner ziehe man in dem entstandenen Viereck *FBCD* eine Diagonale *BD*, welche das Dreieck *BDC* abschneidet; lege durch die gegenüberliegende Spitze *C* dieses Dreiecks eine Parallele zu *BD*, mache dieselbe so lang, bis sie die Verlängerung der anliegenden Seite *AB* in *G* trifft, und ziehe *DG*. Alsdann ist aus dem Viereck *FBCD* das inhaltsgleiche Dreieck *FGD* geworden, mithin die Aufgabe gelöst.

Der Beweis ergiebt sich aus der Inhaltsgleichheit der Dreiecke *ADE* und *ADF*, so wie der Dreiecke *BDC* und *BDG*, nach §. 116.

Aus dieser Construction folgt von selbst, wie man mit einem mehr als fünfseitigen Polygon zu verfahren hat. Auch ist leicht zu erkennen, wie die Construction sich ändern muß, wenn das Polygon erhabene Winkel enthält.

Anmerkung. Nach dem vorigen Abschnitt kann jedes Dreieck in ein Rechteck, und dieses in ein Quadrat verwandelt werden. Folglich läßt sich allgemein jedes Polygon in ein Quadrat verwandeln.

Sechster Abschnitt.

Vom Kreise.

Tangenten und Secanten.

§. 141.

Erklärung.*) Unter einer Tangente des Kreises versteht man eine unbegrenzte gerade Linie, welche mit dem Kreise nur Einen Punkt gemein hat.

Dieser gemeinschaftliche Punkt wird der Berührungspunkt genannt.

Auch sagt man von einer Tangente, sie berühre (oder tangire) den Kreis.

§. 142.

Erklärung. Unter einer Secante des Kreises versteht man eine unbegrenzte gerade Linie, welche mit dem Kreise zwei Punkte gemein hat.

Diese beiden gemeinschaftlichen Punkte werden die Schnittpunkte genannt.

Auch sagt man von einer Secante, sie schneide den Kreis.

---

*) Hier sind zuvor die §§. 26 bis 32 zu wiederholen.

§. 143.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche in dem Endpunkte eines Halbmessers rechtwinkelig auf diesem Halbmesser steht, ist eine Tangente des Kreises.

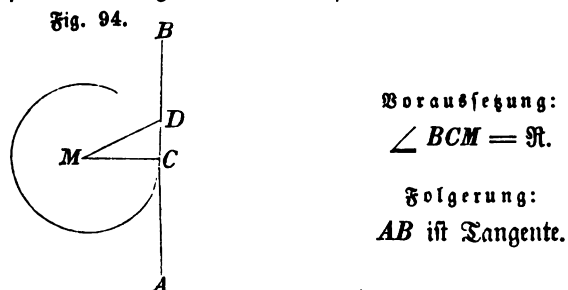


Fig. 94.

Voraussetzung:
$\angle BCM = R$.

Folgerung:
AB ist Tangente.

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß die gerade Linie *AB* außer dem Punkte *C* keinen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein hat.

Gesetzt es sei *D* ein zweiter Punkt der geraden Linie *AB*, welcher zugleich dem aus *M* als Mittelpunkt construirten Kreise angehört. Man ziehe *MD*. Alsdann hat man nach §. 27

$$MD = MC.$$

Aber in dem rechtwinkeligen Dreiecke *MDC* ist nach §. 37

$$MD > MC,$$

und dieses widerspricht der vorigen Gleichung.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn *C* der einzige Punkt ist, welchen die gerade Linie *AB* mit dem Kreise gemein hat, w. z. b. w.

§. 144.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche in dem Endpunkte eines Halbmessers nicht rechtwinkelig auf diesem Halbmesser steht, ist eine Secante des Kreises.

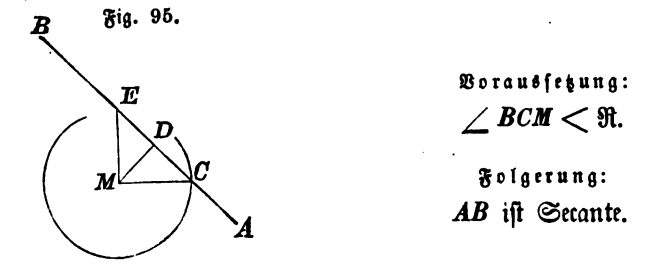


Fig. 95.

Voraussetzung:
$\angle BCM < R$.

Folgerung:
AB ist Secante.

Beweis. Es muß gezeigt werden, daß die gerade Linie AB außer dem Punkte C noch einen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein hat.

Man fälle aus dem Mittelpunkte M des Kreises auf die gerade Linie AB das Perpendikel MD, trage die Länge CD nach DE ab und ziehe ME. Alsdann ist nach §. 74, 2)

$$MC = ME,$$

folglich ist nach §. 29 der Punkt E ein Punkt derjenigen Kreis-Peripherie, welche durch C geht und den Punkt M zum Mittelpunkte hat; d. h. die gerade Linie AB hat zwei Punkte C und E mit dem Kreise gemein, w. z. b. w.

§. 145.

Lehrsatz. Jede Tangente schließt mit dem Halbmesser im Berührungspunkte einen rechten Winkel ein.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 143.)

Fig. 96.

Voraussetzung:

AB ist Tangente in C.

Folgerung:

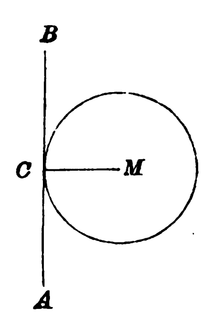
$\angle BCM = R.$

Beweis. Gesetzt es sei $\angle BCM$ nicht gleich einem rechten Winkel, so würde, nach dem vorigen Lehrsatze, die gerade Linie AB außer dem Punkte C noch einen zweiten Punkt mit dem Kreise gemein haben, was der Voraussetzung widerspricht.

Dieser Widerspruch hört nur auf, wenn $\angle BCM = R$ ist, w. z. b. w.

§. 146.

Aufgabe. An einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben eine Tangente zu legen.



Gegeben:

○ aus *M*,
Punkt *C* in der Peripherie.

Gesucht:

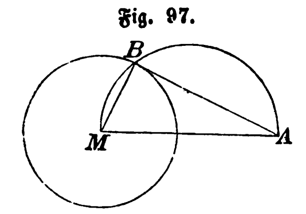
Tangente in *C* an ○.

Die Construction folgt unmittelbar aus dem Lehrsatze §. 143.

§. 147.

Aufgabe. An einen gegebenen Kreis von einem gegebenen Punkte außerhalb desselben eine Tangente zu ziehen.

Fig. 97.



Gegeben:

○ aus *M*,
Punkt *A* außerhalb desselben.

Gesucht:

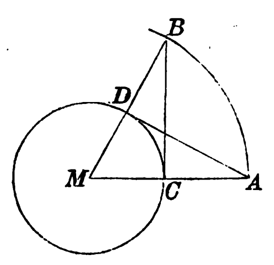
Tangente aus *A* an ○.

Erste Construction, Fig. 97. Man ziehe *MA*, construire über dieser Linie, als Durchmesser, den Halbkreis *MBA*, und verbinde den Punkt *B*, wo dieser Halbkreis den gegebenen Kreis trifft, mit *A* durch die gerade Linie *BA*. Diese Linie ist die gesuchte Tangente.

Zum Beweise ziehe man *MB* und wende den Lehrsatz §. 68 an, nach welchem $\angle MBA = R$ ist.

Zweite Construction, Fig. 98. Man ziehe *MA*, construire aus *M* als Mittelpunkt mit *MA* als Halbmesser den Kreisbogen *AB*, errichte in *C* auf *MA* das Perpendikel *CB*, welches den Kreisbogen *AB* in *B* trifft, ziehe *MB*, und endlich aus dem Schnittpunkte *D* die gerade Linie *DA*. Diese Linie ist die gesuchte Tangente.

Fig. 98.



Zum Beweise hat man nach §. 60 $\triangle MDA \equiv \triangle MCB$, woraus folgt $\angle MDA = R$.

Anmerkung. Durch jede dieser Constructionen sind aus demselben Punkte A zwei Tangenten an den gegebenen Kreis möglich.

§. 148.

Lehrsatz. Die beiden Tangenten, welche man von einem gegebenen Punkte außerhalb eines Kreises an diesen Kreis legen kann, sind gleich lang.

Fig. 99.

Voraussetzung:
AB und AC sind Tangenten.

Folgerung:
$AB = AC$.

Beweis. Man ziehe MB, MC und MA. Alsdann ist

$$MA = MA,$$
$$MB = MC \text{ nach §. 27},$$
$$\angle MBA = \angle MCA = R \text{ nach §. 145},$$

folglich nach §. 76

$$\triangle MBA \equiv \triangle MCA,$$

und daraus nach §. 54, $AB = AC$, w. z. b. w.

§. 149.

Erklärung. Eine Sehne ist eine begrenzte gerade Linie, welche zwei Punkte einer Kreis-Peripherie mit einander verbindet.

Man kann auch sagen, eine Sehne sei derjenige Theil einer Secante, welcher innerhalb des Kreises liegt.

§. 150.

Lehrsatz. Eine gerade Linie, welche aus dem Mittelpunkt des Kreises nach der Mitte einer Sehne gezogen wird, steht rechtwinkelig auf dieser Sehne.

Verbindet man die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ist dieser Lehrsatz bewiesen im §. 69.

§. 151.

Lehrsatz. Ein Perpendikel, welches aus dem Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefällt wird, halbirt diese Sehne.

Ist gleich wie der vorige Lehrsatz bewiesen im §. 70.

§. 152.

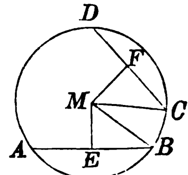
Lehrsatz. Ein Perpendikel, welches in der Mitte einer Sehne auf dieser Sehne errichtet wird, trifft den Mittelpunkt des Kreises.

Ist gleich wie der vorige Lehrsatz bewiesen im §. 73.

§. 153.

Lehrsatz. Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleiche Abstände vom Mittelpunkte.

Fig. 100.



Voraussetzung:

$AB = CD$,

$ME \perp AB$, $MF \perp CD$.

Folgerung:

$ME = MF$.

Beweis. Man ziehe MB und MC. Alsdann ist

$MB = MC$ nach §. 27,

$EB = FC$ nach §. 151,

$\angle MEB = MFC = R$ nach der Voraussetzung;

folglich nach §. 76

$\triangle MEB \cong \triangle MFC$,

mithin auch $ME = MF$, w. z. b. w.

§. 154.

Lehrsatz. Sehnen eines Kreises, welche gleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, sind gleich groß.

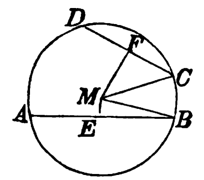
(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Der Beweis kann nach dem Vorbilde des vorigen Beweises geführt werden.

§. 155.

Lehrsatz. Wenn zwei Sehnen eines Kreises ungleich sind, so hat die größere von ihnen den kleineren Abstand vom Mittelpunkte.

Fig. 101.



Voraussetzung:

$AB > CD$,

$ME \perp AB$, $MF \perp CD$.

Folgerung:

$ME < MF$.

Beweis. Man ziehe MB und MC. Alsdann ist nach §. 127

$$\square\, MB = \square\, ME + \square\, EB$$

$$\square\, MC = \square\, MF + \square\, FC$$

und da man außerdem hat $MB = MC$, mithin auch $\square\, MB = \square\, MC$, so folgt aus den beiden vorigen Gleichungen

$$\square\, ME + \square\, EB = \square\, MF + \square\, FC.$$

Nun ist nach der Voraussetzung $AB > CD$, folglich auch, wegen §. 151, $BE > FC$ und daraus

$$\square\, EB > \square\, FC;$$

und wenn man diese Ungleichung von der vorigen Gleichung subtrahirt, so kommt

$$\square\, ME < \square\, MF,$$

d. i. $ME < MF$, w. z. b. w.

§. 156.

Lehrsatz. Wenn zwei Sehnen eines Kreises ungleiche Abstände vom Mittelpunkte haben, so ist diejenige von ihnen die größere, welche den kleineren Abstand vom Mittelpunkt hat.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Der Beweis kann nach dem Vorbilde des vorigen Beweises geführt werden.

§. 157.

Zusatz. Die größte von allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser.

§. 158.

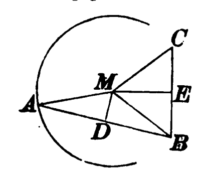
Lehrsatz. Eine gerade Linie kann mit einem Kreise nicht drei Punkte gemein haben.

Der Beweis ist in §. 74, 5) enthalten.

§. 159.

Aufgabe. Einen Kreis zu construiren, welcher durch drei gegebene Punkte geht.

Fig. 102.



Gegeben:

Punkte A, B, C.

Gesucht:

○ durch A, B, C.

Construction. Man verbinde die drei gegebenen Punkte A, B, C durch die beiden geraden Linien AB und BC. In der Mitte D von AB errichte man ein Perpendikel DM; ebenso in der Mitte E von BC errichte man ein Perpendikel EM; und den Durchschnittspunkt M dieser beiden Perpendikel verbinde man mit A durch die gerade Linie MA. Wenn man nun aus M als Mittelpunkt mit MA als Halbmesser einen Kreis construirt, so wird dieser Kreis zugleich durch die drei gegebenen Punkte A, B, C gehen.

Zum Beweise ziehe man noch MB und MC. Alsdann folgt aus §. 74, 2)

$$MA = MB = MC;$$

folglich liegen nach §. 29 die Punkte A, B, C in einer Kreis-Peripherie, deren Mittelpunkt M ist.

Determination. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn die drei gegebenen Punkte in Einer geraden Linie liegen.

Lage zweier Kreise.

§. 160.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise den Mittelpunkt und einen Punkt ihrer Peripherie mit einander gemein haben, so decken sie sich.

Der Beweis ergiebt sich aus §. 29.

§. 161.

Zusatz. Kreise von gleichen Halbmessern sind congruent.

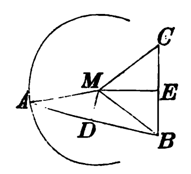
Denn man kann sie nach dem vorigen Lehrsatze so auf einander legen, daß sie sich decken.

Kreise von gleichen Halbmessern nennt man kürzer: gleiche Kreise.

§. 162.

Lehrsatz. **Wenn zwei Kreise drei Punkte mit einander gemein haben, so decken sie sich.**

Fig. 102.



Voraussetzung:

Durch *A*, *B*, *C* gehen zwei Kreise.

Folgerung:

Beide Kreise decken sich.

Beweis. Da die Punkte *A*, *B*, *C* beiden Kreisen zugleich angehören, so fallen auch die Sehnen *AB* und *BC* beider Kreise auf einander; folglich fallen auch die Perpendikel *DM* und *EM* auf einander, welche in beiden Kreisen auf den Mitten *D* und *E* dieser Sehnen errichtet sind; und mithin muß auch endlich der Punkt *M* als Mittelpunkt beiden Kreisen zugleich angehören. Nun haben die beiden Kreise den Mittelpunkt *M* und einen Punkt z. B. *A* der Peripherie mit einander gemein, folglich decken sie sich nach §. 160, w. z. b. w.

§. 163.

Erklärung. Zwei Kreise, welche einerlei Mittelpunkt und verschiedene Halbmesser haben, werden concentrische Kreise genannt.

§. 164.

Erklärung. Wenn zwei Kreise verschiedene Mittelpunkte haben, so versteht man unter ihrer Centrallinie die unbegrenzte gerade Linie, welche durch ihre Mittelpunkte gelegt werden kann.

§. 165.

Erklärung. Von zwei Kreisen, welche nur Einen Punkt mit einander gemein haben, sagt man, sie berühren sich in diesem Punkte.

Von zwei Kreisen, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, sagt man, sie schneiden sich in diesen Punkten.

Die Berührung zweier Kreise ist eine äußere oder eine innere Berührung, je nachdem beide Kreise ganz außerhalb einander, oder der eine ganz innerhalb des andern liegen. Zwei sich schneidende Kreise liegen immer zum Theil in einander und zum Theil außer einander.

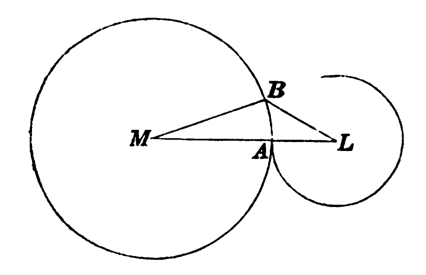
§. 166.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise einen Punkt ihrer Centrallinie mit einander gemein haben, so berühren sie sich in diesem Punkte.

Da die Berührung eine innere oder eine äußere sein kann, so sind hier zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall.

Fig. 103.



Voraussetzung:

M, A, L in gerader Linie.

Folgerung:

A ist Berührungspunkt.

Beweis. Gesetzt die beiden Kreise hätten, außer A, noch einen zweiten Punkt B mit einander gemein. Man ziehe die Halbmesser MB und LB. Alsdann ist nach §. 27

$$MB = MA,$$
$$LB = LA,$$

woraus durch Addition folgt

$$MB + LB = ML.$$

Aber nach §. 78 ist

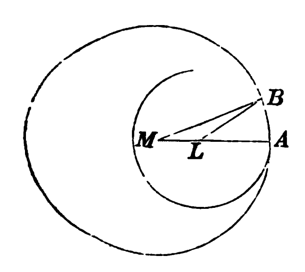
$$MB + LB > ML,$$

folglich findet hier ein Widerspruch statt.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn die beiden Kreise keinen zweiten Punkt außer *A* mit einander gemein haben; folglich berühren sie sich in *A*, w. z. b. w.

Zweiter Fall.

Fig. 104.



Voraussetzung:

M, *L*, *A* in gerader Linie.

Folgerung:

A ist Berührungspunkt.

Beweis. Gesetzt die beiden Kreise hätten wie vorhin, außer *A*, einen zweiten Punkt *B* mit einander gemein. Man ziehe die Halbmesser *MB* und *LB*. Alsdann ist nach §. 27

$$MB = MA,$$
$$LB = LA,$$

woraus durch Subtraction folgt

$$MB - LB = ML.$$

Aber nach §. 79 ist

$$MB - LB < ML,$$

folglich findet hier ein Widerspruch statt.

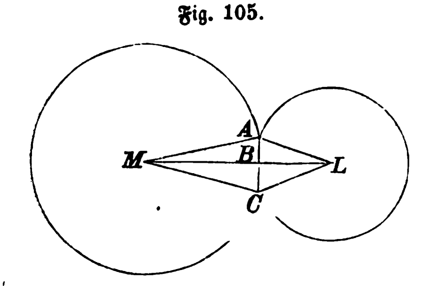
Der Widerspruch hört nur auf, wenn die beiden Kreise keinen zweiten Punkt außer *A* mit einander gemein haben; folglich berühren sie sich in *A*, w. z. b. w.

§. 167.

Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich berühren, so liegt der Berührungspunkt in ihrer Centrallinie.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 105.



Voraussetzung:
A ist Berührungspunkt.

Folgerung:
M, *A*, *L* in gerader Linie.

Beweis. Gesetzt der Berührungspunkt *A* liege nicht in der Centrallinie *ML*. Man fälle aus *A* ein Perpendikel *AB* auf *ML*, verlängere dasselbe über *B* hinaus, so daß $BC = AB$ wird, und ziehe *MA*, *MC*, *LA* und *LC*. Alsdann ist nach §. 74, 2)

$$MA = MC,$$
$$LA = LC,$$

folglich haben nach §. 29 die beiden Kreise außer dem Berührungspunkte *A* noch einen zweiten Punkt *C* mit einander gemein, was der Voraussetzung widerspricht.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn der Berührungspunkt *A* in die Centrallinie *ML* fällt, w. z. b. w.

Der Beweis bleibt wörtlich derselbe, die beiden Kreise mögen sich von außen (wie in Fig. 105) oder von innen berühren.

§. 168.

Zusatz. Zwei sich berührende Kreise haben im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.

Oder wenn man an einen von zwei sich berührenden Kreisen im Berührungspunkte dieser Kreise eine Tangente legt, so berührt diese Tangente in demselben Punkte zugleich auch den anderen Kreis.

Winkel im Kreise.

§. 169.

Erklärung. Unter einem Centriwinkel versteht man einen Winkel, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkte eines Kreises liegt.

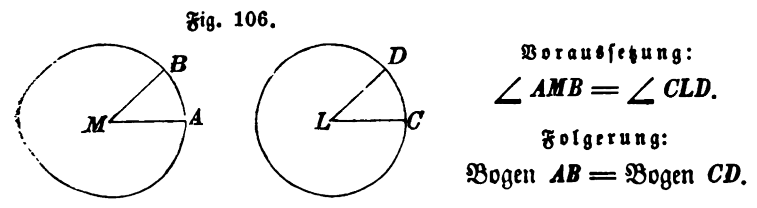
Jedem Centriwinkel gehört ein Kreisbogen zu, welcher zwischen den Schenkeln desselben enthalten ist. Es sei *AB* dieser Kreisbogen; dann kann man den Centriwinkel, welcher auf dem Bogen *AB* steht, kurz durch C (*AB*) bezeichnen.

Ebenso gehört jedem hohlen Centriwinkel eine Sehne zu, welche zwischen den Schenkeln desselben enthalten ist und die Endpunkte des ihm zugehörigen Bogens verbindet.

§. 170.

Lehrsatz. Zu gleichen Centriwinkeln in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Bögen.

Fig. 106.



Voraussetzung:

$\angle AMB = \angle CLD$.

Folgerung:

Bogen AB = Bogen CD.

Beweis. Man lege die beiden Winkel *AMB* und *CLD* so auf einander, daß *L* auf *M* und *LC* auf *MA* fällt; alsdann wird wegen der Voraussetzung auch *LD* auf *MB* fallen. Ferner werden, wegen Gleichheit der Halbmesser, die Punkte *A* und *C*, sowie die Punkte *B* und *D* einander decken; und da überdies nach §. 160 die beiden Kreis-Peripherien einander decken, so müssen auch die Bögen *AB* und *CD* ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen, oder nach §. 30 hat man

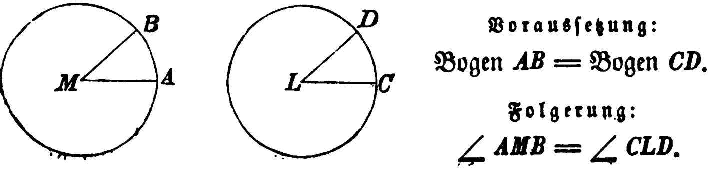
Bogen AB = Bogen CD

w. z. b. w.

§. 171.

Lehrsatz. Zu gleichen Bögen in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Centriwinkel.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:

Bogen AB = Bogen CD.

Folgerung:

$\angle AMB = \angle CLD$.

Beweis. Man lege die beiden gleichen Bögen *AB* und *CD* so auf einander, daß sie ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen, also zugleich auch die Punkte *A* und *C*, sowie die Punkte *B* und *D* einander decken; welches nach §. 30 möglich ist. Alsdann werden nach §. 162 auch die Mittelpunkte *M* und *L* beider Kreise einander decken; folglich wird auch $\angle AMB$ mit $\angle CLD$ zusammenfallen, oder es ist

$$\angle AMB = \angle CLD$$

w. z. b. w.

Anmerkung. In diesem Lehrsatze beruht der eigentliche Grund für die Messung der Winkel durch Kreisbögen, welche in der Erklärung §. 32 angezeigt worden ist. Denn aus diesem Lehrsatze erst kann man schließen, daß alle Winkel von 1° unter sich gleich groß sind; ebenso alle Winkel von 1′, und von 1″; und hieraus kann man ferner schließen, daß man immer dieselbe Anzahl von Graden, Minuten und Secunden für einen gegebenen Winkel erhalten wird, wie groß man auch den Halbmesser desjenigen Kreisbogens annimmt, welcher aus dem Scheitelpunkte des Winkels, als Mittelpunkt, zwischen den Schenkeln desselben construirt wird.

§. 172.

Lehrsatz. Zu gleichen Centriwinkeln in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Sehnen; und umgekehrt, zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel.

Dieser Lehrsatz ist nach §. 169 auf hohle Centriwinkel beschränkt. Der Beweis ergiebt sich in jedem der beiden Fälle durch eine Congruenz zweier Dreiecke.

§. 173.

Zusatz. Zu gleichen Bögen in einem Kreise, oder in gleichen Kreisen, gehören gleiche Sehnen; und umgekehrt, zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bögen.

Dieser Satz, welcher unmittelbar aus den drei vorigen Sätzen folgt, ist auf Bögen beschränkt, welche kleiner als ein Halbkreis sind.

§. 174.

Erklärung. Unter einem Peripheriewinkel versteht *man einen Winkel*, dessen Scheitelpunkt in die Peripherie

eines Kreises fällt und dessen Schenkel entweder zwei Sehnen, oder eine Sehne und eine Tangente sind.

Man hat hiernach sogleich zwei Arten von Peripheriewinkeln zu unterscheiden, je nachdem der Winkel von zwei Sehnen, oder von einer Sehne und einer Tangente, als Schenkeln, gebildet wird.

Jedem Peripheriewinkel gehört ein Kreisbogen zu, welcher zwischen den Schenkeln desselben enthalten ist.

§. 175.

Lehrsatz. Ein Peripheriewinkel ist der Hälfte desjenigen Centriwinkels gleich, welchem derselbe Bogen zugehört.

Erster Fall. Der Peripheriewinkel wird von einer Sehne und einer Tangente gebildet.

Fig 107.

Voraussetzung:
AB ist Sehne
AC ist Tangente.

Folgerung:
$\angle BAC = \frac{1}{2}$ C (AB).

Beweis. Es sei M der Mittelpunkt des Kreises. Man ziehe MA und MB; alsdann ist

$$\angle AMB = \text{C}\ (AB),$$

und wenn man aus M auf AB das Perpendikel ME fällt, so hat man vermöge des §. 70

$$\angle AME = \tfrac{1}{2}\ \text{C}\ (AB).$$

Nun ist vermöge des Lehrsatzes §. 45 in dem in E rechtwinkeligen Dreiecke AME

$$\angle AME + \angle MAE = \text{R};$$

ferner ist nach dem Lehrsatze §. 145

$$\angle BAC + \angle MAE = \text{R}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\angle BAC + \angle MAE = \angle AME + \angle MAE$$

und daraus nach Subtraction des $\angle MAE$

$$\angle BAC = \angle AME$$

$$\text{d. i. } \angle BAC = \tfrac{1}{2}\ \text{C}\ (AB)$$

w. z. b. w.

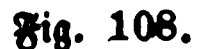
In diesem Beweise ist vorausgesetzt worden, daß der gegebene Peripheriewinkel *BAC* ein spitzer Winkel sei. Sollte dieser Winkel aber ein stumpfer Winkel sein, z. B. $\angle BAD$, so hat man sofort ebenso

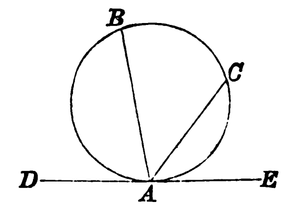
$$\angle BAD = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AFB).$$

Denn diese Gleichung liefert, zu der vorigen Endgleichung addirt, die identische Gleichung

$$2\,\mathfrak{R} = 2\,\mathfrak{R}.$$

Zweiter Fall. Der Peripheriewinkel wird von zwei Sehnen gebildet.


Fig. 108.



Voraussetzung:

AB, *AC* sind Sehnen.

Folgerung:

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC).$$

Beweis. Man lege im Scheitelpunkt *A* des Peripheriewinkels an den Kreis die Tangente *DE*. Alsdann ist nach dem vorhergehenden ersten Falle

$$\angle BAD = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AB),$$
$$\angle CAE = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(AC),$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt und ihre Summe von der identischen Gleichung

$$2\,\mathfrak{R} = 2\,\mathfrak{R}$$

subtrahirt, so bleibt

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC)$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Von dem hier bewiesenen Lehrsatze ist der Lehrsatz des Thales §. 68 nur ein besonderer Fall. Denn der Winkel im Halbkreise ist gleichfalls ein Peripheriewinkel; der ihm zugehörige Bogen ist ein Halbkreis.

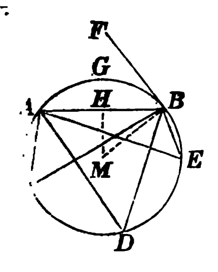
§. 176.

Zusatz. Zu gleichen Peripheriewinkeln in einem Kreise,

in gleichen Kreisen, gehören gleiche Bögen; und um=hrt, zu gleichen Bögen gehören gleiche Peripheriewinkel.

Demnach sind auch in einem Kreise alle Peripheriewinkel über erlei Kreisbogen gleich groß, wo auch in der Kreis=Peripherie Scheitelpunkt des Winkels angenommen werden mag.

Fig 108a.



Z. B. in Fig. 108a ist

$$\angle ACB = \angle ADB$$
$$= \angle AEB = \angle ABF.$$

Denn alle diese Winkel sind Peripheriewinkel auf demselben Bogen *AGB*.

Anmerkung. Man macht hiervon Anwendung beim Bau der chauspielhäuser, wo man den Logenreihen im Zuschauerraume die estalt eines Kreisbogens *ACDEB* giebt, welcher die Oeffnung der ühne, *AB*, zur Sehne hat. Dies gewährt den Vortheil, daß allen uschauern in einerlei Logenreihe die Oeffnung der Bühne unter leichen Sehwinkeln erscheint; denn diese Sehwinkel sind nichts anders als die Peripheriewinkel *ACB*, *ADB*, *AEB*, deren Scheitel=punkte *C*, *D*, *E* die Köpfe der Zuschauer sind, über demjenigen Bogen *AGB*, welcher den Zuschauerraum zu einem vollen Kreise ergänzt. Im griechischen Theater war der Kreisbogen, den der Zu=schauerraum bildet, wenig größer als ein Halbkreis, und im römischen Theater genau ein Halbkreis; in den heutigen Theatern dagegen beträgt er drei Viertel der Kreis=Peripherie und darüber.

§. 176a.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen geraden Linie, als hne, einen Kreisbogen zu construiren, welchem ein ge= als Peripheriewinkel zugehört.

Es sei *AB*, Fig. 108a, die gegebene gerade Linie. selbe im Punkte *B*, als Scheitelpunkt, einen elcher dem gegebenen Winkel gleich ist; halbire te Perpendikel auf *AB* in *H*, und auf *BF* in *B*,

welche sich in *M* durchschneiden, und construire aus *M* als Mittelpunkt mit *MB* als Halbmesser einen Kreis. Derjenige Bogen *AGB* dieses Kreises, welcher innerhalb des Winkels *ABF* fällt, ist der gesuchte Kreisbogen.

Der Beweis beruht auf dem vorigen Paragraph.

§. 177.

Erklärung. Unter einem excentrischen Winkel versteht man einen Winkel, dessen Schenkel einen Kreis treffen und dessen Scheitelpunkt weder in den Mittelpunkt, noch in die Peripherie dieses Kreises fällt.

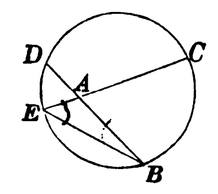
Der Scheitelpunkt des excentrischen Winkels kann entweder innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen. Im ersten Falle können die Schenkel des Winkels den Kreis nur schneiden; im zweiten Falle können sie den Kreis entweder schneiden oder berühren.

Jeder excentrische Winkel enthält zwischen seinen Schenkeln, die nöthigenfalls rückwärts verlängert werden müssen, zwei ihm zugehörige Kreisbögen.

§. 178.

Lehrsatz. Der excentrische Winkel, dessen Scheitelpunkt innerhalb des Kreises liegt, ist der halben Summe zweier Centriwinkel gleich, welche den beiden zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltenen Bögen zugehören.

Fig. 109.



Voraussetzung:
A liegt innerhalb des ○.

Folgerung:

$$\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) + \mathfrak{C}\,(DE)}{2}.$$

Beweis. Man ziehe *BE*. Alsdann ist nach §. 47

$$\angle BAC = \angle BEC + \angle DBE.$$

Ferner hat man aus §. 175

$$\angle BEC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC)$$
$$\angle DBE = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

und wenn man diese beiden Werthe in die vorige Gleichung substituirt, so kommt

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC) + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

d. i. $\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) + \mathfrak{C}\,(DE)}{2}$

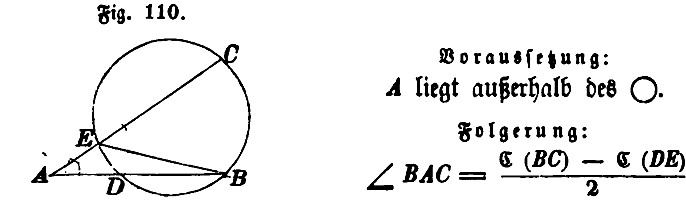
w. z. b. w.

Anmerkung. Dieser Satz findet eine wichtige Anwendung bei der Messung mit Winkel-Instrumenten, um den Fehler der Excentricität dieser Instrumente wegzuschaffen, worüber die Lehrbücher der praktischen Geometrie nähere Auskunft geben.

§. 179.

Lehrsatz. Der excentrische Winkel, dessen Scheitelpunkt außerhalb des Kreises liegt, ist der halben Differenz zweier Centriwinkel gleich, welche den beiden zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltenen Bögen zugehören.

Fig. 110.



Voraussetzung:
A liegt außerhalb des ○.

Folgerung:
$$\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) - \mathfrak{C}\,(DE)}{2}$$

Beweis. Man ziehe BE. Alsdann ist nach §. 47

$$\angle BAC + \angle DBE = \angle BEC$$

und daraus

$$\angle BAC = \angle BEC - \angle DBE.$$

Ferner hat man aus §. 175

$$\angle BEC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC)$$
$$\angle DBE = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

und wenn man diese beiden Werthe in die vorige Gleichung substituirt, so kommt

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(BC) - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DE)$$

d. i. $\angle BAC = \frac{\mathfrak{C}\,(BC) - \mathfrak{C}\,(DE)}{2}$

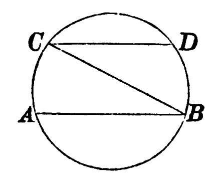
w. z. b. w.

Wenn ein Schenkel, oder beide Schenkel des gegebenen Winkels den Kreis berühren, so kann der Beweis für diese Fälle leicht dem vorigen nachgebildet werden.

§. 180.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen einen Kreis treffen, so sind die zwischen ihnen enthaltenen Bögen gleich groß.

Fig. 111.



Voraussetzung:
$AB \parallel CD$.

Folgerung:
Bogen AC = Bogen BD.

Beweis. Man ziehe BC. Alsdann ist nach §. 40

$$\angle ABC = \angle BCD$$

und daraus folgt nach §. 176

$$\text{Bogen } AC = \text{Bogen } BD$$

w. z. b. w.

Wenn eine der beiden Parallelen, oder beide Parallelen den Kreis berühren, so kann der Beweis für diese Fälle leicht dem vorigen nachgebildet werden.

Eingeschriebene und umschriebene Figuren.

§. 181.

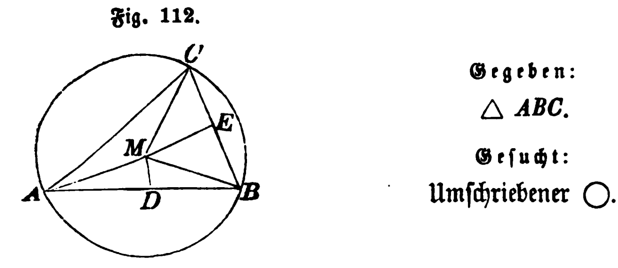
Erklärung. Eine eingeschriebene Figur ist eine Figur, deren Seiten Sehnen eines Kreises sind. Dieser Kreis wird der die Figur umschriebene Kreis genannt.

Eine umschriebene Figur ist eine Figur, deren Seiten Tangenten eines Kreises sind. Dieser Kreis wird der der Figur eingeschriebene Kreis genannt.

§. 182.

Aufgabe. Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis zu umschreiben.

Fig. 112.



Gegeben:

$\triangle$ *ABC*.

Gesucht:

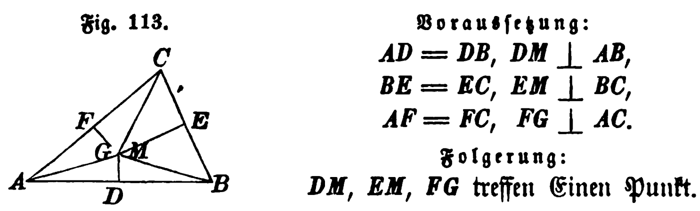
Umschriebener $\bigcirc$.

Die Construction ist dieselbe wie im §. 159.

§. 183.

Lehrsatz. Die Perpendikel auf den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 113.



Voraussetzung:

$$AD = DB,\ DM \perp AB,$$
$$BE = EC,\ EM \perp BC,$$
$$AF = FC,\ FG \perp AC.$$

Folgerung:

DM, *EM*, *FG* treffen Einen Punkt.

Beweis. Man verbinde *M* mit den drei Eckpunkten *A*, *B*, *C* des Dreiecks durch die geraden Linien *MA*, *MB*, *MC*. Alsdann hat man nach §. 74, 2)

$$MA = MB,\ MB = MC,$$

und daraus

$$MA = MC$$

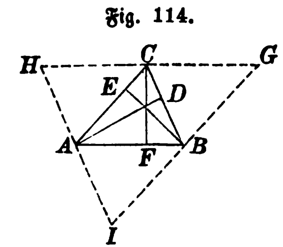
d. h. das Dreieck *AMC* ist gleichschenkelig. Wendet man auf dieses Dreieck den Lehrsatz §. 73 an, so folgt, daß das Perpendikel *FG* den Punkt *M* treffen muß; folglich durchschneiden sich die drei in *D*, *E*, *F* auf den Seiten des Dreiecks errichteten Perpendikel in demselben Punkte *M*, w. z. b. w.

Anmerkung. Der Durchschnittspunkt *M*, d. i. nach der vorigen Aufgabe der Mittelpunkt des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, liegt für ein spitzwinkeliges Dreieck innerhalb des Dreiecks; für ein rechtwinkeliges Dreieck in der Mitte der Hypotenuse; und für ein stumpfwinkeliges Dreieck außerhalb des Dreiecks. Der zweite dieser drei Fälle ist die Umkehrung des Lehrsatzes §. 68.

§. 184.

Lehrsatz. Die Perpendikel aus den drei Eckpunkten eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 114.



Voraussetzung:
$AD \perp BC$,
$BE \perp AC$,
$CF \perp AB$.

Folgerung:
AD, BE, CF treffen Einen Punkt.

Beweis. Man ziehe durch die drei Eckpunkte des Dreiecks Parallelen mit den gegenüberliegenden Seiten, insbesondere $HG \parallel AB$, $IH \parallel BC$, $IG \parallel AC$. Alsdann ist nach §. 40

$$AD \perp HI,\ BE \perp IG,\ CF \perp HG,$$

und nach §. 97

$$HA = CB = AI,\ IB = AC = BG,\ HC = AB = CG.$$

Folglich sind die drei Linien AD, BE, CF des Dreiecks ABC zugleich Perpendikel auf den Mitten der Seiten des Dreiecks GHI und durchschneiden sich also nach dem vorigen Lehrsatze in Einem Punkte, w. z. b. w.

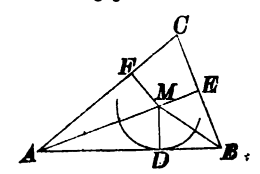
Diesen Beweis hat Gauß gegeben.

Anmerkung. Der Durchschnittspunkt der drei Perpendikel dieses Lehrsatzes fällt für ein spitzwinkeliges Dreieck innerhalb des Dreiecks; für ein rechtwinkeliges Dreieck in den Scheitelpunkt des rechten Winkels; und für ein stumpfwinkeliges Dreieck außerhalb des Dreiecks.

§. 185.

Aufgabe. Einem gegebenen Dreiecke einen Kreis einzuschreiben.

Fig. 115.



Gegeben:
$\triangle ABC$.

Gesucht:
Eingeschriebener ○.

Construction. Man halbire die beiden Winkel *CAB* und *CBA* durch die Linien *AM* und *BM*, und aus dem Durchschnittspunkte *M* dieser Linien fälle man auf *AB* das Perpendikel *MD*. Wenn man sodann aus *M* als Mittelpunkt mit *MD* als Halbmesser einen Kreis construirt, so wird dieser Kreis zugleich die drei Seiten *AB*, *BC* und *AC* des gegebenen Dreiecks berühren.

Zum Beweise ziehe man noch $ME \perp BC$ und $MF \perp AC$. Alsdann folgt nach §. 58

$$\triangle AMD \equiv \triangle AMF, \ \triangle BMD \equiv \triangle BME,$$

und daraus

$$MD = ME = MF;$$

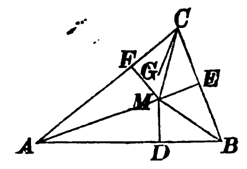
folglich liegen nach §. 23 die Punkte *D*, *E*, *F* in einer Kreis-Peripherie, deren Mittelpunkt *M* ist, und in diesen Punkten wird nach §. 143 derselbe Kreis von den drei Seiten des Dreiecks berührt.

Anmerkung. Wenn man die drei Seiten des Dreiecks über die Eckpunkte hinaus verlängert und die dadurch entstehenden Außenwinkel des Dreiecks in *A* und *B* gleichfalls halbirt, so geben die Durchschnitte aller Halbirungslinien die Mittelpunkte von vier berührenden Kreisen. Von diesen vier Kreisen liegen drei außerhalb des Dreiecks, und berühren je eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten. Die Zeichnung fordert Sorgfalt, wenn die Berührungen genau zutreffen sollen.

§. 186.

Lehrsatz. Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 116.



Voraussetzung:

$$\angle CAM = \angle MAB,$$
$$\angle CBM = \angle MBA,$$
$$\angle ACG = \angle GCB.$$

Folgerung:

AM, *BM*, *CG* treffen Einen Punkt.

Beweis. Man ziehe aus *M* auf die drei Seiten des Dreiecks die Perpendikel *MD*, *ME*, *MF*. Alsdann hat man nach §. 58

$$\triangle AMD \equiv \triangle AMF, \text{ woraus } MD = MF;$$
$$\triangle BMD \equiv \triangle BME, \text{ woraus } MD = ME;$$

folglich auch

$$MF = ME.$$

Wenn man nun ferner die Verbindungslinie MC zieht, so folgt nach §. 76

$$\triangle CMF \equiv \triangle CME, \text{ woraus } \angle FCM = \angle ECM.$$

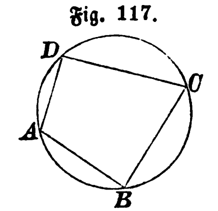
Mithin ist CM die Halbirungslinie des Winkels ACB. Nach der Voraussetzung aber ist CG die Halbirungslinie desselben Winkels; folglich muß CG mit CM zusammenfallen, d. h. die drei Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks durchschneiden sich in demselben Punkte M, w. z. b. w.

Anmerkung. Der Lehrsatz bleibt auch dann noch wahr, wenn die drei Winkel, welche halbirt werden, ein Dreiecks-Winkel und die den beiden anderen Dreiecks-Winkeln anliegenden Außenwinkel des Dreiecks sind. In diesem Falle liegt der Durchschnittspunkt der drei Halbirungslinien außerhalb des Dreiecks, in dem obigen Falle dagegen stets innerhalb des Dreiecks. S. d. Anmerkung des vorigen Paragraphen.

§. 187.

Lehrsatz. In einem eingeschriebenen Vierecke ist die Summe der einander gegenüberliegenden Winkel gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 117.



Voraussetzung:
$ABCD$ ist ein eingeschriebenes Viereck.

Folgerung:
$$\angle DAB + \angle DCB = 2\,R.$$

Beweis. Nach §. 175 ist

$$\angle DAB = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DCB)$$
$$\angle DCB = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DAB)$$

folglich

$$\angle DAB + \angle DCB = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DCB) + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{C}\,(DAB).$$

Nun ist die Summe $\mathfrak{C}\,(DCB) + \mathfrak{C}\,(DAB)$ gleich einem Centriwinkel, welchem die ganze Kreis-Peripherie zugehört, oder gleich 4 R; also

$$\angle DAB + \angle DCB = 2\,R$$

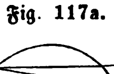
w. z. b. w.

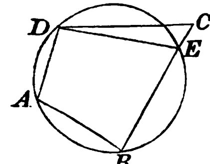
§. 187a.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die Summe zweier einander gegenüberliegenden Winkel gleich zwei rechten Winkeln ist, so kann dem Vierecke ein Kreis umschrieben werden.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes).

Fig. 117a.





Voraussetzung:
$\angle DAB + \angle DCB = 2$ R.

Folgerung:
Umschriebener ○.

Beweis. Man construire nach §. 182 einen Kreis durch die drei Punkte A, B, und D.

Gesetzt dieser Kreis gehe nicht durch den vierten Punkt C, sondern schneide die Seite BC (oder deren Verlängerung) in E. Man ziehe DE. Alsdann ist in dem eingeschriebenen Vierecke $ABED$ nach dem vorigen Lehrsatze

$$\angle DAB + \angle DEB = 2 \text{ R},$$

und wenn man hiermit die Voraussetzung vergleicht, so folgt

$$\angle DEB = \angle DCB,$$

was dem Satze §. 48 widerspricht.

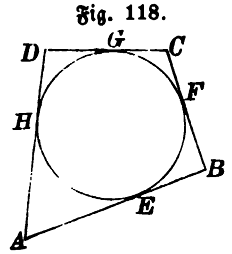
Der Widerspruch hört nur auf, wenn der Kreis auch durch den Punkt C geht, w. z. b. w.

Unter den Parallelogrammen haben das Quadrat und das Rechteck, und unter den Trapezen hat das gleichschenkelige Trapez die hier vorausgesetzte Eigenschaft.

§. 188.

Lehrsatz. In einem umschriebenen Vierecke sind die Summen der einander gegenüberliegenden Seiten gleich groß.

Fig. 118.



Voraussetzung:
ABCD ist ein umschriebenes Viereck.

Folgerung:
$AD + BC = AB + DC.$

Beweis. Es seien *E, F, G, H* die Berührungspunkte der vier Seiten des Vierecks mit dem Kreise. Nach §. 148 hat man

$$AH = AE,$$
$$DH = DG,$$
$$BF = BE,$$
$$CF = CG,$$

und aus der Addition dieser Gleichungen folgt

$$AD + BC = AB + DC$$

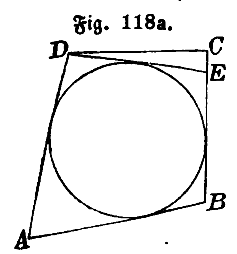
w. z. b. w.

§. 188a.

Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die Summen der einander gegenüberliegenden Seiten gleich groß sind, so kann dem Vierecke ein Kreis eingeschrieben werden.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 118a.



Voraussetzung:
$AD + BC = AB + DC.$

Folgerung:
Eingeschriebener ○.

Beweis. Man construire nach §. 185 einen Kreis, welcher die drei Seiten *AD, AB* und *BC* berührt.

Gesetzt dieser Kreis berühre nicht die vierte Seite *DC*. Man lege aus *D* eine Tangente an den Kreis, welche die Seite *BC* (oder deren Verlängerung) in *E* schneidet. Alsdann ist in dem umschriebenen Vierecke *ABED* nach dem vorigen Lehrsatze

$$AD + BE = AB + DE,$$

und wenn man dies von der Voraussetzung

$$AD + BC = AB + DC$$

subtrahirt, so folgt

$$CE = DC - DE,$$

was dem Lehrsatze §. 79 widerspricht.

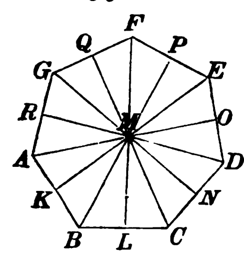
Der Widerspruch hört nur auf, wenn der Kreis auch die Seite *DC* berührt, w. z. b. w.

Unter den Parallelogrammen haben das Quadrat und der Rhombus die hier vorausgesetzte Eigenschaft.

§. 189.

Lehrsatz. Jedem regelmäßigen Polygon läßt sich ein Kreis umschreiben und einschreiben.

Fig. 119.



Voraussetzung:

$AB = BC = CD = DE$ ꝛc.

$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$ ꝛc.

Folgerung:

1) Umschriebener ○.

2) Eingeschriebener ○.

Beweis. 1) Man halbire die beiden Seiten *AB* und *BC* des Polygons in *K* und *L*, und errichte in diesen Punkten auf *AB* und *BC* die Perpendikel *KM* und *LM*, welche sich in *M* durchschneiden. Zieht man *MA*, *MB*, *MC*, so ist nach §. 74, 2)

$$MA = MB = MC,$$

folglich wird ein aus *M* als Mittelpunkt mit *MA* als Halbmesser construirter Kreis zugleich durch die Punkte *A*, *B*, *C* gehen.

Ferner ziehe man *MD*. Nach §. 83 ist

$$\triangle MBA \cong \triangle MBC,$$

und daraus $\angle MBA = \angle MBC$; und da überdies nach §. 61 $\angle MBC = \angle MCB$ ist, so folgt

$$\angle MBA = \angle MCB.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der gegebenen $\angle ABC = \angle BCD$, so bleibt

$$\angle MBC = \angle MCD$$

und daraus hat man nach §. 60

$$\triangle MBC \cong \triangle MCD$$

folglich

$$MC = MD,$$

d. h. der aus M als Mittelpunkt mit MA als Halbmesser construirte Kreis wird auch durch den Punkt D gehen.

So kann man fortfahren zu beweisen, indem man ME ꝛc. zieht, daß derselbe Kreis durch alle folgenden Eckpunkte E ꝛc. des Polygons gehen wird. Man hat also einen umschriebenen Kreis, w. z. b. w.

2) Man fälle noch aus dem Punkte M auf die Seiten CD, DE ꝛc. die Perpendikel MN, MO ꝛc. Alsdann hat man aus dem Vorigen nach §. 58

$\triangle MBK \equiv \triangle MBL$, $\triangle MCL \equiv \triangle MCN$, $\triangle MDN \equiv \triangle MDO$ ꝛc.

und hieraus

$$MK = ML = MN = MO \text{ ꝛc.}$$

Folglich wird ein aus M als Mittelpunkt mit MK als Halbmesser construirter Kreis zugleich durch die Punkte K, L, N, O ꝛc. gehen und in diesen Punkten die Seiten des Polygons berühren. Man hat also einen eingeschriebenen Kreis, w. z. b. w.

Aus diesem Beweise geht außerdem hervor, daß der umschriebene und der eingeschriebene Kreis eines jeden regelmäßigen Polygons concentrische Kreise sind.

§. 190.

Erklärung. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Polygons wird der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygons genannt.

Wie man den Mittelpunkt eines gegebenen regelmäßigen Polygons finden könne, ergiebt sich aus der im vorigen Beweise geführten Construction.

§. 191.

Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises in eine Anzahl gleicher Bögen getheilt worden ist, so geben die Sehnen zwischen den Theilpunkten ein eingeschriebenes regelmäßiges Polygon, und die Tangenten in den Theilpunkten, bis zu ihren Durchschnitten verlängert, ein umschriebenes regelmäßiges Polygon.

Fig. 120.

Voraussetzung:

Bogen *AB* = Bogen *BC* = Bogen *CD* ꝛc.

Folgerung:

1) *ABCD* . . . . eingesch. regelm. Polygon,

2) *KLMN*. . . . umschr. regelm. Polygon.

Beweis. 1) Man hat nach §. 173

$$AB = BC = CD \text{ ꝛc.}$$

und nach §. 176

$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE \text{ ꝛc.}$$

Folglich ist *ABCD* . . . . ein regelmäßiges Polygon, w. z. b. w.

2) Ferner hat man nach §. 56

$$\triangle AKB \equiv \triangle BLC \equiv \triangle CMD \text{ ꝛc.}$$

und daraus

$$KB = LC = MD \text{ ꝛc.}$$
$$BL = CM = DN \text{ ꝛc.}$$

mithin durch Addition

$$KL = LM = MN \text{ ꝛc.}$$

Aus der Congruenz derselben Dreiecke (oder auch aus §. 179) hat man überdies

$$\angle AKB = \angle BLC = \angle CMD \text{ ꝛc.}$$

Folglich ist *KLMN* . . . . ein regelmäßiges Polygon, w. z. b. w.

Anmerkung. Aus diesem Lehrsatze geht hervor, daß die Aufgabe, einem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Polygon einzuschreiben oder zu umschreiben, zusammenfällt mit der andern Aufgabe, die Kreis-Peripherie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen. Diese Aufgabe ist aber einer allgemeinen Auflösung nicht fähig. Gauß hat im Jahre 1796 (damals 19 Jahre alt) aus Sätzen der höheren Arithmetik zuerst nachgewiesen, auf welche Fälle die Elementar-Geometrie, welche nur mit gerader Linie und Kreis construirt, beschränkt sei: es sind dies nämlich diejenigen Theilungen der Kreis-Peripherie, deren Theilungszahl eine Primzahl von der Form

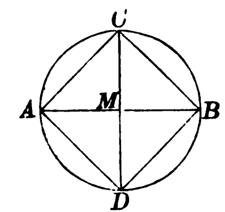
$$2^{2^n} + 1$$

ist, also die Theilungen in 3, 5, 17, 257, ... gleiche Theile, wozu noch diejenigen Theilungen gezählt werden müssen, welche aus diesen z. B. durch Halbirung von Kreisbögen abgeleitet werden können.

§. 192.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu construiren.

Fig. 121.



Gegeben:
Ein ○.

Gesucht:
Eingeschriebenes □.

Construction. Man ziehe zwei Durchmesser *AB* und *CD*, welche auf einander rechtwinkelig stehen, und verbinde deren Endpunkte durch die Sehnen *AC*, *CB*, *BD*, *AD*. Alsdann ist *ADBC* das gesuchte eingeschriebene Quadrat.

Zum Beweise hat man aus §. 170 die Gleichheit der Bögen *AC*, *CB*, *BD* und *AD*, und hieraus folgt nach §. 191, daß *ADBC* ein regelmäßiges Viereck, d. h. ein Quadrat ist.

§. 193.

Zusatz. Jedem Kreise kann durch geometrische Construction ein regelmäßiges Viereck, Achteck, Sechzehneck rc. sowohl eingeschrieben als umschrieben werden.

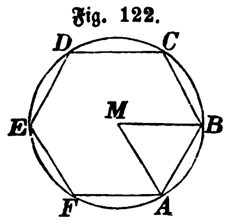
Denn das eingeschriebene regelmäßige Achteck wird aus dem Viereck erhalten, indem man auf die Seiten des letzteren aus dem Mittelpunkte Perpendikel fällt, diese bis zur Kreis-Peripherie verlängert und die entstandenen Schnittpunkte mit den Eckpunkten des Vierecks verbindet. Ebenso entsteht das eingeschriebene regelmäßige Sechzehneck aus dem Achteck u. s. w.

Die umschriebenen regelmäßigen Polygone entstehen nach §. 191 aus den gleichnamigen eingeschriebenen Polygonen, indem man in den Eckpunkten der letzteren Tangenten an den Kreis legt und diese bis zu ihren Durchschnitten verlängert.

§. 194.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck zu construiren.

Fig. 122.



Gegeben:

Ein ○.

Gesucht:

Eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck.

Construction. Man trage den Halbmesser des gegebenen Kreises, *MA*, in der Peripherie des Kreises als Sehne ab, so oft es angeht; alsdann liefert die Verbindung *ABCDEF* dieser Sehnen das gesuchte eingeschriebene regelmäßige Sechseck.

Zum Beweise verbinde man die Endpunkte einer dieser Sehnen, *AB*, mit dem Mittelpunkte *M* des Kreises durch die geraden Linien *MA* und *MB*. Alsdann ist nach §. 62 $\angle AMB = 60°$, folglich nach §. 170 der Bogen $AB = \frac{1}{6}$ der Kreis-Peripherie; und da dasselbe von den Bögen *BC*, *CD* &c. bewiesen werden kann, so folgt aus §. 191, daß *ABCDEF* ein regelmäßiges Sechseck ist.

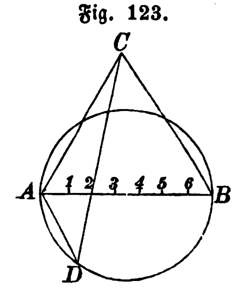
§. 195.

Zusatz. Jedem Kreise kann durch geometrische Construction ein regelmäßiges Dreieck, Sechseck, Zwölfeck &c. sowohl eingeschrieben als umschrieben werden.

Das eingeschriebene regelmäßige Dreieck (gleichseitige Dreieck) entsteht aus dem Sechseck, indem man in diesem drei Diagonalen zieht. Die übrigen regelmäßigen Polygone ergeben sich auf dieselbe Weise wie im §. 193.

Anmerkung. Zum Schluß mag hier noch eine einfache Methode erwähnt werden, durch welche man früher die allgemeine Construction eines eingeschriebenen Polygons von beliebiger Seitenzahl zu lösen gesucht hat. Man theile den Durchmesser *AB*, Fig. 123, des gegebenen Kreises in so viel gleiche Theile, wie das Polygon Seiten haben soll (z. B. in der Figur in 7 Theile), construire über *AB* ein gleichseitiges Dreieck *ABC*, und ziehe aus der Spitze *C* dieses Dreiecks durch den Theilpunkt 2 des Durchmessers eine gerade Linie, welche verlängert die Kreis-Peripherie in *D* schneidet. Alsdann

Fig. 123.



ist die Sehne AD die gesuchte Polygon-Seite; in einigen Fällen vollkommen genau, in den meisten Fällen aber nur mit angenäherter Richtigkeit.

Geometrische Örter.

§. 196.

Erklärung. Unter dem geometrischen Orte eines Punktes versteht man eine Linie, deren sämmtliche Punkte einer gewissen Forderung Genüge leisten, welche jener Punkt erfüllen soll.

So kann man sehr leicht aus früheren Sätzen folgende geometrischen Örter aufstellen und nachweisen.

1) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat, ist ein Kreis, den man aus dem gegebenen Punkte als Mittelpunkt mit dem gegebenen Abstande als Halbmesser construirt.

2) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände hat, ist ein Perpendikel auf der Mitte der Verbindungslinie dieser beiden Punkte.

3) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von einer gegebenen geraden Linie einen gegebenen Abstand hat, ist eine Parallele zu dieser geraden Linie, die in dem gegebenen Abstande neben ihr fortläuft.

4) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei sich schneidenden gegebenen geraden Linien gleiche Abstände hat, ist die Halbirungslinie des Winkels dieser beiden geraden Linien.

5) Der geometrische Ort der Spitze eines rechtwinkeligen Dreiecks, welches die gegebene Hypotenuse zur Grundlinie hat, ist ein über dieser Grundlinie als Durchmesser construirter Halbkreis. (§. 68.)

6) Der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks, welches eine gegebene Grundlinie und einen gegebenen Winkel an der Spitze hat, ist ein über der gegebenen Grundlinie als Sehne construirter Kreisbogen, welcher den gegebenen Winkel als Peripheriewinkel in sich enthält. (§. 176.)

7) Der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks, welches eine gegebene Grundlinie und einen gegebenen Flächeninhalt hat, ist

eine Parallele zur Grundlinie, deren Abstand von der Grundlinie gleich der Höhe des Dreiecks ist. (§. 116.)

Die geometrischen Örter enthalten, wie man aus diesen Beispielen sieht, nichts als Sätze, welche außerdem schon in der Geometrie vorkommen, nur in einer eigenthümlichen Ausdrucksform. Sie wurden in dieser Form von den Griechen und werden auch noch gegenwärtig vorzugsweise zur Auflösung geometrischer Aufgaben angewandt.

Siebenter Abschnitt.

Verhältnisse und Proportionen unter Linien.

---

§. 197.

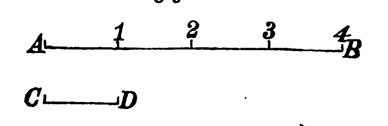
Erklärung. Eine gegebene begrenzte Linie messen heißt: Untersuchen, wie eine zweite gegebene Linie, die Einheit, als Theil gesetzt werden muß, um eine der ersten gleiche Länge hervorzubringen.

Das Resultat der Messung wird durch eine Zahl ausgedrückt.

Die Messung wird ausgeführt durch unmittelbare Anlegung der Einheit an die gegebene Linie. Man kann dabei die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1) Es sei *AB*, Fig. 124, die zu messende gerade Linie und *CD* die gegebene Einheit. Wenn die Einheit *CD* genau ein oder mehrere Mal gesetzt werden muß, um die zu messende gerade Linie *AB* zu erschöpfen, hier z. B. 4 mal, so ist das Resultat der Messung eine ganze Zahl, wie hier 4.

Fig. 124.



2) Wenn, Fig. 125, ein Setzen der Einheit *CD* selbst nicht

Fig. 125.

hinreicht, um die zu messende gerade Linie *AB* zu erschöpfen, aber ein aliquoter Theil der Einheit, z. B. $\frac{1}{5}$ *CD*, als Theil gesetzt den noch gebliebenen Rest genau erschöpft, so ist das Resultat der Messung eine gemischte Zahl oder ein Bruch, wie hier $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$.

3) Wenn aber auch ein aliquoter Theil der Einheit die zu messende Größe nicht erschöpft, in wie viel gleiche Theile man auch die Einheit getheilt haben mag, so ist die Messung nicht genau, sondern nur angenähert ausführbar, und das Resultat der Messung ist eine irrationale Zahl.

Dieser letzte Fall kann bei praktischen Messungen niemals eintreten, da ein etwaiger Rest, sobald derselbe eine gewisse Kleinheit erreicht hat, durch die Sinne nicht mehr unterschieden werden kann. Daß dieser Fall in aller Strenge aber dennoch möglich ist, wird sich unten zeigen.

Anmerkung. In der Praxis wird ein Maßstab gebraucht, bei Zeichnungen ein verjüngter Maßstab, s. §. 253.

§. 198.

Erklärung. Eine begrenzte Linie wird ein Vielfaches einer anderen begrenzten Linie genannt, wenn die zweite genau ein oder mehrere Mal gesetzt werden muß, um die erste zu erschöpfen.

Die zweite heißt ein Maß der ersten.

So ist z. B. *AB* in Fig. 124 ein Vielfaches von *CD*, nämlich das Vierfache; und *CD* ein Maß von *AB*. Dagegen ist *AB* in Fig. 125 kein Vielfaches von *CD*, und *CD* kein Maß von *AB*.

§. 199.

Erklärung. Zwei begrenzte Linien werden commensurabel genannt, wenn sich ein gemeinschaftliches Maß angeben läßt, durch welches beide genau gemessen werden können.

Sie heißen dagegen incommensurabel, wenn ein solches gemeinschaftliches Maß nicht existirt.

Um das gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Linien, falls es existirt, zu finden, kann man mit geringer Abänderung das

Verfahren anwenden, welches in der Arithmetik (Arithm. §. 76, Aufl. 2) zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Divisors zweier Zahlen angegeben worden ist. Man trage die kleinere Linie so oft es angeht auf der größeren ab, den Rest trage man wieder auf der kleineren ab, den alsdann gebliebenen Rest trage man wieder auf dem vorigen Reste ab u. s. w., bis diese Abtragung genau aufgeht. Der letzte Rest, mit welchem die Abtragung aufgeht, ist das größte gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Linien. Wenn aber beständig ein Rest bleibt, so weit man auch das Verfahren fortsetzen mag, so existirt kein gemeinschaftliches Maß der beiden gegebenen Linien.

Wird von zwei commensurabelen Linien die eine durch die andere gemessen, so ist das Resultat der Messung eine rationale Zahl, d. h. entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch. Wird aber von zwei incommensurabelen Linien die eine durch die andere gemessen, so ist das Resultat der Messung eine irrationale Zahl, d. h. man kann es nur angenähert angeben, obwohl so nahe wie man will.

§. 200.

Erklärung. Unter dem Verhältniß zweier Linien versteht man den Quotienten der beiden Zahlen, welche man erhält, wenn beide Linien durch einerlei Maß gemessen werden.

Die beiden Linien selbst werden die Glieder des Verhältnisses genannt; und zwar in der Reihenfolge, in welcher sie hier betrachtet werden, das Vorderglied und das Hinterglied.

Die Bezeichnung des Verhältnisses geschieht wie die des Quotienten, z. B. *AB* : *CD*, gesprochen *AB* zu *CD*.

Es seien z. B. *AB* und *CD*, Fig. 126, zwei begrenzte gerade Linien, deren Verhältniß man bestimmen will. Man habe gefunden, daß ein gewisses gemeinschaftliches Maß 7 mal auf *AB*, und 4 mal auf *CD* kann abgetragen werden. Sodann ist das gesuchte Verhältniß dieser beiden Linien, oder das Verhältniß *AB* : *CD*, gleich dem Quotienten 7 : 4 oder $\frac{7}{4}$. Wenn man aber die beiden gegebenen Linien vertauscht, so findet man das Verhältniß *CD* : *AB* gleich dem Quotienten 4 : 7 oder $\frac{4}{7}$.

Fig. 126.

Ein Verhältniß ist rational, wenn die beiden Glieder desselben commensurabel sind; es ist dagegen irrational, wenn die beiden Glieder desselben incommensurabel sind. Ein rationales Verhältniß ist das in Fig. 126 gegebene; Beispiele von irrationalen Verhältnissen werden sich weiter unten finden.

Anmerkung. Zu der hier gegebenen Erklärung des Verhältnisses muß nun zugleich noch aus der Arithmetik die Erklärung der Proportion (Arithm. §. 138) und der stetigen Proportion (Arithm. §. 139) gezogen werden, mit der einzigen und sich von selbst ergebenden Unterscheidung, daß, während die Arithmetik nur von Proportionen unter Zahlen handelt, die Geometrie hier es nur mit Proportionen unter Linien zu thun hat.

Überdies kann man aber sogleich bemerken, daß die hier in den §§. 197—200 aufgestellten Begriffe nicht auf Linien allein, sondern auf Größen überhaupt Anwendung finden, insbesondere also auch auf alle Raumgrößen, mit denen die Geometrie sich beschäftigt. Diese Begriffe werden deshalb im Verlaufe der Geometrie je mit den nöthigen Sonder=Bestimmungen wiederholt zur Sprache kommen.

Das Strahlensystem mit parallelen Transversalen.

§. 201.

Erklärung. Unter einem Strahlensystem versteht man den Inbegriff aller Strahlen, welche aus Einem Punkt gezogen werden können.

Jede gerade Linie, welche Strahlen eines Strahlensystems schneidet, ohne durch den Strahlenpunkt zu gehen, wird eine Transversale des Strahlensystems genannt.

Hier ist die Erklärung §. 15 nachzusehen.

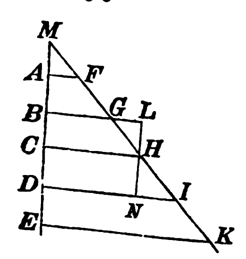
Unter den Abschnitten eines Strahls werden hier demnächst immer diejenigen Entfernungen verstanden werden, welche beliebige Punkte des Strahls von dem Strahlenpunkte besitzen. Dagegen die Entfernungen dieser Punkte unter einander werden die Theile des Strahls genannt werden.

§. 202.

Lehrsatz. Wenn man auf einem Strahl eine beliebige Anzahl gleicher Theile abträgt und durch alle Theilpunkte

parallele Transversalen zieht, so wird auch jeder andere Strahl, den diese Transversalen treffen, in Theile zerlegt, welche unter sich gleich sind.

Fig. 127.



Voraussetzung:

$MA = AB = BC = CD = DE$ 2c.

$AF \parallel BG \parallel CH \parallel DI \parallel EK$ 2c.

Folgerung:

$MF = FG = GH = HI = IK$ 2c.

Beweis. Um z. B. zu beweisen, daß $GH = HI$ ist, ziehe man durch H die Linie $LN \parallel ME$, welche die Transversale DI in N und die verlängerte Transversale BG in L trifft. Alsdann hat man nach §. 97

$$BC = LH$$
$$CD = HN$$

und da nach der Voraussetzung $BC = CD$ ist, so folgt auch

$$LH = HN.$$

Nimmt man hiezu die gleichen Winkel

$$\angle LHG = \angle NHI \text{ nach §. 25,}$$
$$\angle HGL = \angle HIN \text{ nach §. 40,}$$

so folgt aus §. 58

$$\triangle LHG \equiv \triangle NHI$$

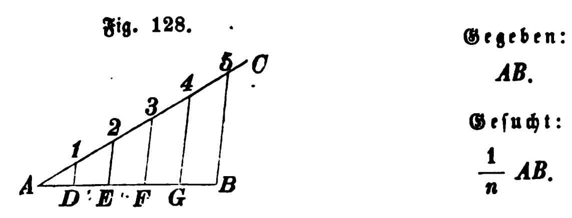
und daraus

$$GH = HI.$$

Ebenso kann man von jeden zwei Theilen des Strahls MK beweisen, daß sie gleich groß sind. Folglich sind alle diese Theile gleich groß, w. z. b. w.

§. 203.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.



Gegeben:

AB.

Gesucht:

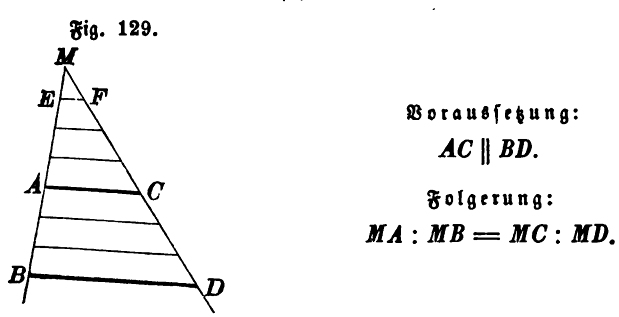
$\frac{1}{n}$ *AB*.

Construction. Es sei z. B. *AB* in 5 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe aus *A* einen Strahl *AC*, welcher mit *AB* einen beliebigen spitzen oder stumpfen Winkel einschließt, trage auf *AC* fünf beliebig große, aber unter sich gleiche Theile *A* 1, 12, 23, 34, 45 ab, verbinde 5 mit *B*, und ziehe zu der Transversale 5*B* die Parallelen 1*D*, 2*E*, 3*F* und 4*G*. Alsdann ist die gegebene gerade Linie *AB* durch die Punkte *D*, *E*, *F*, *G* in 5 gleiche Theile zerlegt.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Lehrsatze.

§. 204.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniß unter den Abschnitten des einen Strahls gleich dem Verhältnisse unter den Abschnitten des anderen Strahls.



Voraussetzung:

$AC \parallel BD$.

Folgerung:

$MA : MB = MC : MD$.

Beweis. Um das Verhältniß $MA : MB$ der beiden Abschnitte des einen Strahls darzustellen, muß man nach §. 200 diese beiden Abschnitte durch einerlei Maß messen. Es seien nun 1) die Abschnitte *MA* und *MB* commensurabel. Alsdann läßt sich nach §. 199 ein gemeinschaftliches Maß angeben, welches auf *MA* und *MB* genau abgetragen werden kann. Ist z. B. *ME* dieses Maß, und

ist dasselbe n mal in MA (in der Figur 4 mal) und r mal in MB (in der Figur 7 mal) enthalten, so hat man nach §. 200

$$MA : MB = n : r \qquad (1.)$$

Zieht man ferner durch alle Theilpunkte des Strahls MB Parallelen zu den Transversalen AC und BD, so werden nach §. 202 auch auf dem Strahl MD eben so viel unter sich gleiche Theile hergestellt, wie auf MB. Man kann mithin MF wie ein gemeinschaftliches Maß der beiden Abschnitte MC und MD ansehen, welches n mal in MC und r mal in MD enthalten ist. Also hat man auch

$$MC : MD = n : r. \qquad (2.)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) endlich folgt

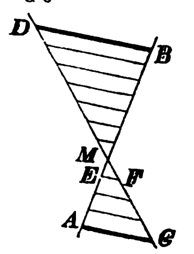
$$MA : MB = MC : MD$$

w. z. b. w.

Es seien 2) die Abschnitte MA und MB incommensurabel. Alsdann wird jedes Maß von MA, welches man angeben mag, nicht genau in MB abgetragen werden können, sondern es wird hier ein Rest bleiben, welcher kleiner als das angenommene Maß ist. Wenn man diesen Rest nicht berücksichtigt, so gelten wieder die vorigen Schlüsse. Da man es aber in seiner Gewalt hat, das willkürliche Maß und folglich auch diesen Rest so klein anzunehmen, wie man will, so gilt hier wieder vollkommen genau die vorige Proportion.

Anmerkung. In Fig. 129 liegen die beiden Transversalen auf einerlei Seite des Strahlenpunkts. Es können aber auch, wie in Fig. 130, die Transversalen AC und BD auf verschiedenen Seiten des Strahlenpunkts M liegen, ohne daß die vorigen Schlüsse aufhören richtig zu sein. Man hat also auch hier die Proportion

Fig. 130.



$$MA : MB = MC : MD.$$

Dieselbe Bemerkung gilt in den nächstfolgenden Paragraphen.

§. 205.

Zusatz. Wenn zwei Strahlen von zwei (oder mehreren) parallelen Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniß unter jeden zwei Theilen des einen Strahls gleich

dem Verhältnisse unter den gleichliegenden Theilen des andern Strahls.

So ist z. B. in Fig. 129 und 130

$$MA : AB = MC : CD.$$

Ebenso

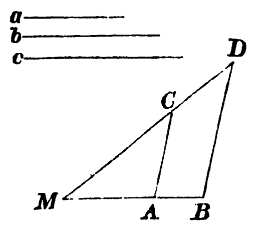
$$MB : AB = MD : CD.$$

Die Beweise für diese Proportionen können dem vorigen leicht nachgebildet werden.

§. 206.

Aufgabe. **Zu drei gegebenen Linien, deren Reihefolge gegeben ist, die vierte Proportionale zu finden.**

Fig. 131.



Gegeben:

Die Linien a, b, c.

Gesucht:

Zu a, b, c die vierte Proportionale.

Construction. Man ziehe aus einem beliebigen Punkte M zwei Strahlen, trage auf dem einen dieser Strahlen die Abschnitte $MA = a$ und $MB = b$, und auf dem andern Strahl den Abschnitt $MC = c$ ab, verbinde A mit C durch die gerade Linie AC, und ziehe zu dieser Linie durch B die Parallele BD, welche den verlängerten Strahl MC in D trifft. Alsdann ist MD die gesuchte vierte Proportionale zu den drei gegebenen Linien a, b, c, oder es ist

$$a : b = c : MD.$$

Der Beweis beruhet in dem Lehrsatze §. 204.

Anmerkung. Wenn die drei gegebenen Linien in Zahlen gegeben sind (§. 197), so findet man die vierte Proportionale durch Rechnung nach Arithm. §. 151.

§. 207.

Zusatz. **Zu drei gegebenen Linien, deren Reihefolge gegeben ist, ist nur Eine vierte Proportionale möglich.**

Oder wenn unter vier Linien die Proportion besteht

$$a : b = c : x,$$

und damit gleichzeitig die Proportion

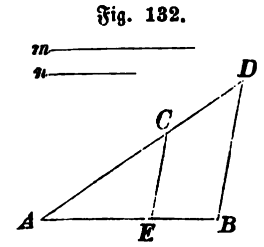
$$a : b = c : y,$$

so ist $x = y$.

§. 208.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Fig. 132.



Gegeben:

Die Linien AB, m, n.

Gesucht:

AB zu theilen in dem Verhältnisse $m : n$.

Construction. Man ziehe aus A einen beliebigen Strahl, trage auf demselben die Theile $AC = m$ und $CD = n$ ab, verbinde D mit B durch die gerade Linie DB, und ziehe zu dieser Linie aus C die Parallele CE, welche die gegebene AB in E trifft. Alsdann ist E der gesuchte Theilpunkt, oder es ist

$$AE : EB = m : n.$$

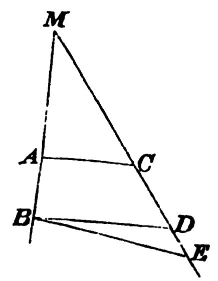
Der Beweis beruhet in §. 205.

§. 209.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei Transversalen so geschnitten werden, daß das Verhältniß unter den Abschnitten des einen Strahls gleich dem Verhältnisse unter den Abschnitten des anderen Strahles ist, so sind die beiden Transversalen parallel.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 204.)

Fig. 133.



Voraussetzung:

$$MA : MB = MC : MD.$$

Folgerung:

$$AC \parallel BD.$$

Beweis. Gesetzt es sei nicht $AC \parallel BD$. Alsdann kann man zu AC durch den Punkt B eine Parallele BE ziehen, welche den Strahl MD in dem Punkte E, verschieden von D, trifft. Nach §. 204 hat man nun

$$MA : MB = MC : ME.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$MA : MB = MC : MD$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt nach §. 207

$$MD = ME,$$

welche Gleichung dem Grundsatze II (Arithm. Seite 4) widerspricht.

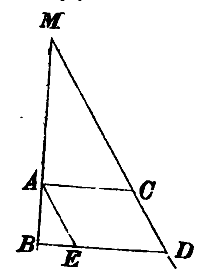
Der Widerspruch hört nur auf, wenn E mit D zusammenfällt. Also ist $AC \parallel BD$, w. z. b. w.

Anmerkung. Als Voraussetzung dieses Lehrsatzes hätte auch eine der Proportionen des §. 205 aufgestellt werden können.

§. 210.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniß unter den Abschnitten der beiden Transversalen gleich dem Verhältnisse unter den Abschnitten eines jeden Strahls.

Fig. 134.



Voraussetzung:

$AC \parallel BD.$

Folgerung:

$MA : MB = AC : BD.$

Beweis. Man ziehe $AE \parallel MD$. Alsdann hat man aus §. 205, indem man B wie Strahlenpunkt und mithin AE und MD wie zwei Transversalen ansieht,

$$MA : MB = ED : BD.$$

[illegible] dem Parallelogramm $AEDC$ ist nach §. 97

$$ED = AC.$$

Folglich

$$MA : MB = AC : BD$$

w. z. b. w.

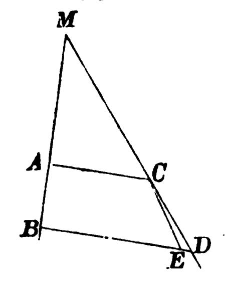
Anmerkung. Wenn drei oder mehrere Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so läßt sich aus dem vorstehenden Lehrsatz auch leicht folgern, daß alle Verhältnisse unter je zwei correspondirenden Abschnitten der beiden Transversalen unter sich gleich groß sind.

§. 211.

Lehrsatz. Wenn auf zwei parallelen Transversalen, welche einen Strahl schneiden, von diesem Strahl aus in übereinstimmender Weise Abschnitte abgetragen werden, welche sich wie die Abschnitte des Strahles verhalten, so liegen die Endpunkte der Abschnitte der Transversalen mit dem Strahlenpunkte in Einer geraden Linie.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 135.



Voraussetzung:

$$MA : MB = AC : BD,$$
$$AC \parallel BD.$$

Folgerung:

M, C, D in Einer geraden Linie.

Beweis. Gesetzt es liegen M, C, D nicht in Einer geraden Linie. Alsdann kann man aus M durch C einen Strahl ziehen, welcher die Transversale BD in dem Punkte E, verschieden von D trifft, und nach §. 210 ist

$$MA : MB = AC : BE.$$

Aber nach der Voraussetzung hat man

$$MA : MB = AC : BD$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt nach §. 207

$$BD = BE,$$

welche Gleichung dem Grundsatze II (Arithmetik Seite 4) widerspricht.

Beweis. Gesetzt es sei nicht $AC \parallel BD$. Alsdann kann man zu AC durch den Punkt B eine Parallele BE ziehen, welche den Strahl MD in dem Punkte E, verschieden von D, trifft. Nach §. 204 hat man nun

$$MA : MB = MC : ME.$$

Aber nach der Voraussetzung ist

$$MA : MB = MC : MD$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt nach §. 207

$$MD = ME,$$

welche Gleichung dem Grundsatze II (Arithm. Seite 4) widerspricht.

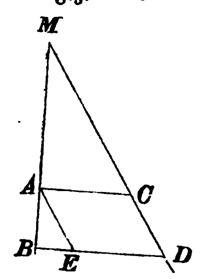
Der Widerspruch hört nur auf, wenn E mit D zusammenfällt. Also ist $AC \parallel BD$, w. z. b. w.

Anmerkung. Als Voraussetzung dieses Lehrsatzes hätte auch eine der Proportionen des §. 205 aufgestellt werden können.

§. 210.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so ist das Verhältniß unter den Abschnitten der beiden Transversalen gleich dem Verhältnisse unter den Abschnitten eines jeden Strahls.

Fig. 134.



Voraussetzung:
$AC \parallel BD$.

Folgerung:
$MA : MB = AC : BD$.

Beweis. Man ziehe $AE \parallel MD$. Alsdann hat man aus §. 205, indem man B wie Strahlenpunkt und mithin AE und MD wie zwei Transversalen ansieht,

$$MA : MB = ED : BD.$$

[illegible] dem Parallelogramm $AEDC$ ist nach §. 97

$$ED = AC.$$

Folglich

$$MA : MB = AC : BD$$

w. z. b. w.

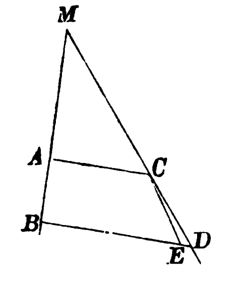
Anmerkung. Wenn drei oder mehrere Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so läßt sich aus dem vorstehenden Lehrsatz auch leicht folgern, daß alle Verhältnisse unter je zwei correspondirenden Abschnitten der beiden Transversalen unter sich gleich groß sind.

§. 211.

Lehrsatz. Wenn auf zwei parallelen Transversalen, welche einen Strahl schneiden, von diesem Strahl aus in übereinstimmender Weise Abschnitte abgetragen werden, welche sich wie die Abschnitte des Strahles verhalten, so liegen die Endpunkte der Abschnitte der Transversalen mit dem Strahlenpunkte in Einer geraden Linie.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)

Fig. 135.



Voraussetzung:

$$MA : MB = AC : BD,$$
$$AC \parallel BD.$$

Folgerung:

M, C, D in Einer geraden Linie.

Beweis. Gesetzt es liegen M, C, D nicht in Einer geraden Linie. Alsdann kann man aus M durch C einen Strahl ziehen, welcher die Transversale BD in dem Punkte E, verschieden von D trifft, und nach §. 210 ist

$$MA : MB = AC : BE.$$

Aber nach der Voraussetzung hat man

$$MA : MB = AC : BD$$

und aus diesen beiden Proportionen folgt nach §. 207

$$BD = BE,$$

welche Gleichung dem Grundsatze II (Arithmetik Seite 4) widerspricht.

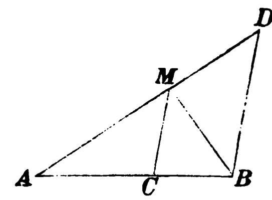
Der Widerspruch hört nur auf, wenn E mit D zusammenfällt. Also liegen M, C, D in Einer geraden Linie, w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn auf zwei Parallelen in übereinstimmender Weise beliebig viel Abschnitte abgetragen werden, welche paarweise unter sich in gleichen Verhältnissen stehen, so läßt sich aus dem vorstehenden Lehrsatze auch beweisen, daß alle durch die correspondirenden Theilpunkte der beiden Parallelen gezogenen geraden Linien sich in Einem Punkte durchschneiden.

§. 212.

Lehrsatz. Ein Strahl, welcher einen Winkel eines Dreiecks halbirt, theilt die diesem Winkel gegenüberliegende Seite im Verhältniß der ihm anliegenden Seiten.

Fig. 136.



Voraussetzung:

$\angle AMC = \angle CMB.$

Folgerung:

$AC : CB = AM : MB.$

Beweis. Man ziehe durch B die Linie $BD \parallel CM$, und verlängere AM über M hinaus bis D. Alsdann hat man aus §. 205, indem man A wie Strahlenpunkt und CM und BD wie zwei Transversalen ansieht,

$$AC : CB = AM : MD.$$

Aber es ist ferner

$$\angle AMC = \angle MDB \text{ nach §. 41}$$
$$\angle CMB = \angle MBD \text{ nach §. 40}$$

und da nach der Voraussetzung $\angle AMC = \angle CMB$ ist, so folgt

$$\angle MDB = \angle MBD,$$

und hieraus nach §. 64

$$MB = MD.$$

Vermöge dieser Gleichung verwandelt sich die obige Proportion in

$$AC : CB = AM : MB$$

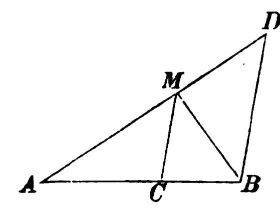
w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn man auch den Außenwinkel *BMD* desselben Dreiecks halbirt, so erhält man in der Verlängerung von *AB* zu den drei Punkten *A*, *C*, *B* den vierten harmonischen Punkt (§. 236). Dies kann jedoch hier nicht weiter verfolgt werden.

§. 213.

Lehrsatz. Wenn ein Strahl, welcher aus einem Eckpunkte eines Dreiecks gezogen wird, die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite im Verhältniß der ihm anliegenden Seiten theilt, so wird durch ihn der an diesem Eckpunkte liegende Winkel des Dreiecks halbirt.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:
$AC : CB = AM : MB.$

Folgerung:
$\angle AMC = \angle CMB.$

Beweis. Man verlängere *AM* über *M* hinaus nach *D*, so daß $MD = MB$ wird, und ziehe *BD*. Vermöge der Voraussetzung hat man sodann

$$AC : CB = AM : MD$$

und daraus folgt nach §. 209, Anm., indem man *A* wie Strahlenpunkt ansieht,

$$CM \parallel BD.$$

Demnach ist ferner

$$\angle AMC = \angle MDB \text{ nach §. 41}$$
$$\angle CMB = \angle MBD \text{ nach §. 40}$$

und da nach der Construction $MB = MD$ ist, so hat man nach §. 61 auch

$$\angle MDB = \angle MBD,$$

und mithin endlich

$$\angle AMC = \angle CMB$$

w. z. b. w.

§. 214.

Erklärung. Unter dem Rechteck aus zwei gegebenen

woraus nach §. 204 folgt

$$MA : MB = MC : MD$$

w. z. b. w.

Anmerkung. In Folge der hier bewiesenen beiden Lehrsätze gelten für die Proportionen unter Linien alle diejenigen Umwandlungen, welche im §. 150 der Arithmetik für geometrische Proportionen unter Zahlen bewiesen worden sind. Denn man hat nur nöthig, in den dortigen Beweisen für die Producte aus Zahlen Rechtecke aus Linien an die Stelle zu setzen.

Ferner kann man nach diesen beiden Lehrsätzen jeden Satz, welcher von Proportionen unter Linien handelt, in einen Satz über inhaltsgleiche Rechtecke verwandeln, und umgekehrt. So ist z. B. die Aufgabe §. 206 völlig einerlei mit der Aufgabe §. 124, wie verschieden auch die Auflösungen beider an den angeführten Stellen ausgefallen sind. Weitere Beispiele werden unten vorkommen.

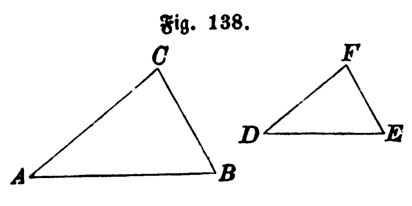
Aehnlichkeit der Figuren.

§. 217.

Erklärung. Zwei Figuren werden ähnlich genannt, wenn ihre Winkel beziehungsweise gleich sind und ihre Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen.

Wenn man z. B. annimmt, daß die beiden Dreiecke ABC und DEF, Fig. 138, ähnlich sein sollen, so sind in dieser Aussage, vermöge der vorstehenden Erklärung, die folgenden sechs Bedingungen enthalten:

Fig. 138.



1) in Betreff der Winkel

$$\angle CAB = \angle FDE,$$
$$\angle ABC = \angle DEF,$$
$$\angle ACB = \angle DFE;$$

2) in Betreff der Seiten

$$AB : DE = BC : EF,$$
$$AB : DE = AC : DF,$$
$$BC : EF = AC : DF.$$

Diese 6 Bedingungen lassen sich aber jederzeit auf 4 zurückführen. Denn aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken folgt immer schon die Gleichheit des dritten Winkels, und aus zwei Proportionen unter den drei Seiten zweier Dreiecke folgt immer schon die dritte Poportion.

Die Congruenz geradliniger Figuren kann wie ein besonderer Fall der Ähnlichkeit angesehen werden. Denn auch in congruenten Figuren sind alle Winkel beziehungsweise gleich, und alle Seiten stehen beziehungsweise in gleichen Verhältnissen; nur kommt die besondere Bedingung hinzu, daß alle diese Verhältnisse den Werth Eins haben.

Man gebraucht das Zeichen $\sim$ für ähnlich.

§. 218.

Zusatz. **Wenn zwei Figuren einer dritten ähnlich sind, so sind sie auch einander ähnlich.**

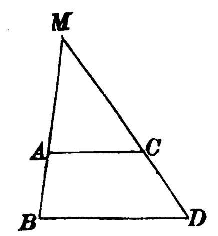
Oder wenn $A \sim B$ und $A \sim C$ ist, so ist auch $B \sim C$.

Dieser Satz gilt auch dann, wenn eine der beiden vorausgesetzten Ähnlichkeiten sich in Congruenz verwandelt. Oder wenn $A \sim B$ und $A \equiv C$, so ist auch $B \sim C$.

§. 219.

Lehrsatz. **Wenn zwei Strahlen von zwei parallelen Transversalen geschnitten werden, so sind die beiden dadurch entstandenen Dreiecke ähnlich.**

Fig. 139.



Voraussetzung:
$AC \parallel BD$.

Folgerung:
$\triangle MAC \sim \triangle MBD$.

Beweis. Man hat

$$\angle AMC = \angle BMD,$$
$$\angle MAC = \angle MBD \text{ nach §. 41},$$
$$\angle MCA = \angle MDB \text{ „ §. 41}.$$

Ferner

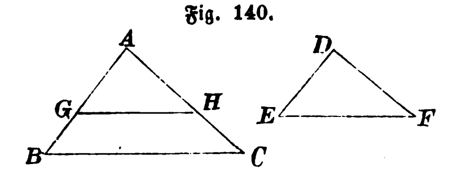
$$MA : MB = MC : MD \text{ nach §. 204},$$
$$MA : MB = AC : BD \text{ „ §. 210},$$
$$MC : MD = AC : BD \text{ „ §. 210}.$$

Da hiermit alle Forderungen der Erklärung §. 217 erfüllt sind, so folgt $\triangle MAC \sim \triangle MBD$, w. z. b. w.

§. 220.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.

Fig. 140.



Voraussetzung:

$$\angle BAC = \angle EDF,$$
$$\angle ABC = \angle DEF,$$
$$[\angle BCA = \angle EFD].$$

Folgerung:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab, so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \quad (1.)$$

Ferner ist

$$AG = DE \text{ nach der Construction}$$
$$\angle GAH = \angle EDF \text{ nach der Voraussetzung},$$

und aus den beiden Gleichungen $\angle AGH = \angle ABC$ (§. 41) und $\angle ABC = \angle DEF$ (Voraussetzung) folgt

$$\angle AGH = \angle DEF.$$

Demnach ist aus §. 56

$$\triangle AGH \equiv \triangle DEF. \quad (2.)$$

Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

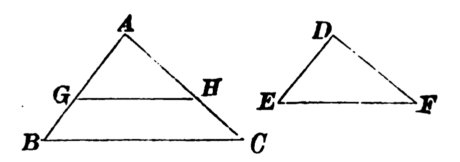
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

w. z. b. w.

§. 221.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten in

gleichen Verhältnissen stehen und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.



Voraussetzung:
$AB : DE = AC : DF$
$\angle BAC = \angle EDF$.

Folgerung:
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab, so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \qquad (1.)$$

Ferner ist

$$AG = DE \text{ nach der Construction,}$$
$$\angle GAH = \angle EDF \text{ nach der Voraussetzung,}$$

und aus den beiden Proportionen $AB : AG = AC : AH$ (§. 204) und $AB : DE = AC : DF$ (Voraussetzung) folgt nach §. 207

$$AH = DF$$

Demnach ist aus §. 60

$$\triangle AGH \cong \triangle DEF. \qquad (2.)$$

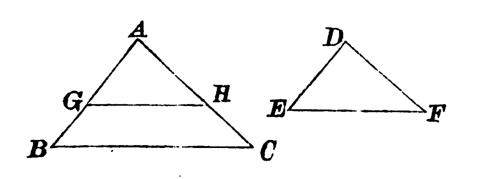
Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

w. z. b. w.

§. 222.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten in gleichen Verhältnissen stehen, und die der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich.



Voraussetzung:
$AB : DE = BC : EF$,
$\angle BAC = \angle EDF$,
$BC > AB$,
$EF > DE$.

Folgerung:
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab,

so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \qquad (1.)$$

Ferner ist

$AG = DE$ nach der Construction,

$\angle GAH = \angle EDF$ nach der Voraussetzung,

und aus den beiden Proportionen $AB : AG = BC : GH$ (§. 210) und $AB : DE = BC : EF$ (Voraussetzung) folgt nach §. 207

$$GH = EF.$$

Demnach ist aus §. 76

$$\triangle AGH \equiv \triangle DEF \qquad (2.)$$

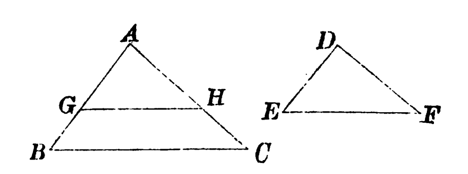
Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

w. z. b. w.

§. 223.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.



Voraussetzung:

$AB : DE = AC : DF,$

$AB : DE = BC : EF,$

$[AC : DF = BC : EF].$

Folgerung:

$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$

Beweis. Man trage von A aus auf AB die Seite DE ab, so daß $DE = AG$ wird, und ziehe durch den erhaltenen Punkt G die Linie $GH \parallel BC$. Alsdann ist nach §. 219

$$\triangle AGH \sim \triangle ABC. \qquad (1).$$

Ferner ist

$AG = DE$ nach der Construction;

aus den beiden Proportionen $AB : AG = AC : AH$ (§. 204) und $AB : DE = AC : DF$ (Voraussetzung) folgt nach §. 207

$$AH = DF,$$

und aus den beiden Proportionen $AB : AG = BC : GH$ (§. 210) und $AB : DE = BC : EF$ (Voraussetzung) folgt ebenso

$$GH = EF.$$

Demnach ist aus §. 83

$$\triangle AGH \equiv \triangle DEF. \qquad (2.)$$

Aus (1) und (2) endlich folgt nach §. 218

$$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

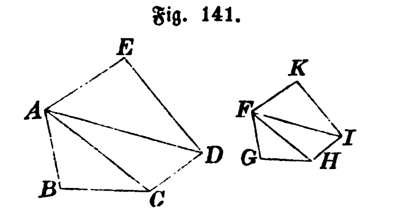
w. z. b. w.

Anmerkung. Die vier Lehrsätze §. 220—223 werden die vier Ähnlichkeitssätze des Dreiecks genannt. Sie entsprechen den vier Congruenzsätzen des Dreiecks, welche in ihren Beweisen zur Anwendung kommen.

§. 224.

Lehrsatz. Wenn zwei Polygone aus ähnlichen Dreiecken, deren sämmtliche Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen, auf übereinstimmende Weise zusammengesetzt sind, so sind die Polygone ähnlich.

Fig. 141.



Voraussetzung:

$\triangle ABC \backsim \triangle FGH,$
$\triangle ACD \backsim \triangle FHI,$
$\triangle ADE \backsim \triangle FIK.$

Folgerung:

$ABCDE \backsim FGHIK.$

Beweis. In beiden Polygonen sind erstens alle Winkel beziehungsweise gleich, weil sie entweder gleiche Winkel in ähnlichen Dreiecken, oder Summen gleicher Winkel aus ähnlichen Dreiecken sind.

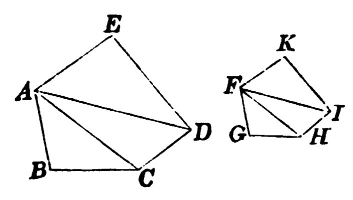
In beiden Polygonen stehen zweitens alle Seiten beziehungsweise in gleichen Verhältnissen, weil sie Seiten ähnlicher Dreiecke sind, welche sämmtlich beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen.

Folglich sind nach §. 217 beide Polygone ähnlich, w. z. b. w.

§. 225.

Lehrsatz. Ähnliche Polygone werden durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

(Umkehrung des vorigen Lehrsatzes.)



Voraussetzung:
ABCDE ∾ *FGHIK*.

Folgerung:
△ *ABC* ∾ △ *FGH*,
△ *ACD* ∾ △ *FHI*,
△ *ADE* ∾ △ *FIK*.

Beweis. Wenn man von den beiden ähnlichen Polygonen *ABCDE* und *FGHIK* zuerst je ein Dreieck, *ABC* und *FGH*, durch eine Diagonale abschneidet, so hat man wegen der Ähnlichkeit der beiden gegebenen Polygone

$$AB : FG = BC : GH,$$
$$\angle ABC = \angle FGH,$$

und daraus folgt nach §. 221

1) △ *ABC* ∾ △ *FGH*.

Aus dieser Ähnlichkeit folgt ferner

$$BC : GH = AC : FH,$$
$$\angle BCA = \angle GHF,$$

und daraus

$$AC : FH = CD : HI,$$
$$\angle ACD = \angle FHI,$$

folglich hat man nach §. 221, indem man je ein zweites Dreieck, *ACD* und *FHI*, durch eine zweite Diagonale abschneidet

2) △ *ACD* ∾ △ *FHI*.

Ebenso kann man fortfahren zu beweisen

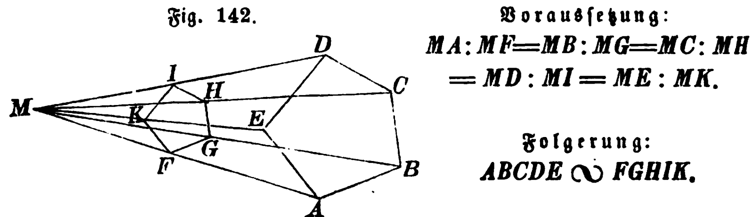
3) △ *ADE* ∾ △ *FIK*

u. s. w., wenn die Reihe der Dreiecke noch größer gewesen wäre.

§. 226.

Lehrsatz. Wenn zwei Figuren so in ein Strahlensystem gelegt werden können, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden, so sind die Figuren ähnlich.

Fig. 142.



Voraussetzung:
$MA : MF = MB : MG = MC : MH$
$= MD : MI = ME : MK.$

Folgerung:
ABCDE ∾ *FGHIK*.

Beweis. Aus

$$MA : MF = MB : MG \text{ folgt } AB \parallel FG \text{ (§. 209)}$$
$$MB : MG = MC : MH \quad „ \quad BC \parallel GH$$
$$MC : MH = MD : MI \quad „ \quad CD \parallel HI$$
$$MD : MI = ME : MK \quad „ \quad DE \parallel IK$$
$$MA : MF = ME : MK \quad „ \quad AE \parallel FK$$

d. h. alle gleichliegenden Seiten der beiden gegebenen Figuren sind parallel. Hieraus kann man weiter schließen:

1) Aus $AB \parallel FG$ folgt $\angle MBA = \angle MGF$ (§. 41)
und aus $BC \parallel GH$ „ $\angle MBC = \angle MGH$,

und die Addition dieser beiden Gleichungen giebt

$$\angle ABC = \angle FGH.$$

Ebenso kann man, durch Addition oder Subtraction gleicher Winkel, die Gleichheit aller übrigen gleichliegenden Winkel der beiden Figuren beweisen.

2) Aus $AB \parallel FG$ folgt $MB : MG = AB : FG$ (§. 210)
und aus $BC \parallel GH$ „ $MB : MG = BC : GH$,

und diese beiden Proportionen geben

$$AB : FG = BC : GH.$$

Ebenso kann man beweisen, daß auch alle übrigen Seiten der beiden Figuren beziehungsweise in gleichen Verhältnissen stehen.

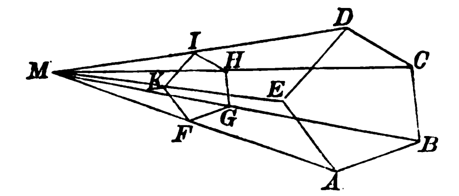
Aus 1) und 2) endlich folgt nach §. 217, daß die beiden gegebenen Figuren ähnlich sind, w. z. b. w.

Anmerkung. Eine ausführliche Betrachtung der Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren, welche hier nicht gegeben werden kann, macht es nöthig, den vorstehenden Satz als Erklärung der Ähnlichkeit zum Grunde zu legen. Diese Erklärung hat alsdann vor der obigen des §. 217 (welche man dem Euklides verdankt) den Vorzug, daß sie nicht allein auch auf krummlinige Figuren, sondern auch, in der Stereometrie, auf räumliche Gebilde jeder Art unmittelbar angewandt werden kann.

In Bezug auf die vorstehende Figur gilt hier wieder die Anmerkung zu §. 204.

§. 227.

Aufgabe. Zu einer gegebenen Figur eine ihr ähnliche Figur zu zeichnen.



Gegeben:
Figur $ABCDE$.

Gesucht:
Eine ähnliche Figur.

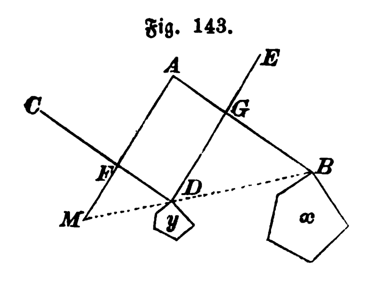
Construction. Man wähle einen beliebigen Punkt M und ziehe aus diesem Punkte Strahlen MA, MB, MC, MD, ME, nach allen Eckpunkten der gegebenen Figur. Auf dem Strahle MA nehme man einen Punkt F so an, daß das Verhältniß $MA : MF$ gleich demjenigen Verhältnisse wird, welches die Seiten der gegebenen zu den Seiten der gesuchten Figur haben sollen; ziehe darauf $FG \parallel AB$, $GH \parallel BC$, $HI \parallel CD$, $IK \parallel DE$, und endlich die gerade Linie FK. Alsdann ist $FGHIK$ die gesuchte Figur, welche der gegebenen $ABCDE$ ähnlich ist.

Der Beweis beruhet in dem vorigen Lehrsatze.

Die Wahl des Punktes M ist vollkommen willkürlich. Man kann ihn sowohl außerhalb der gegebenen Figur (wie oben), als auch innerhalb derselben, oder in einer ihrer Seiten, oder in einem ihrer Eckpunkte annehmen. Auch den Punkt F kann man nicht nur in MA selbst (wie oben), sondern auch in der Verlängerung vom MA über M hinaus, auf die obige Weise festlegen.

Anmerkung. Auf dieser Aufgabe beruhet der sogenannte Storchschnabel oder Pantograph, ein Instrument, welches dazu dient, eine gegebene Figur in einem gegebenen Verhältnisse zu verjüngen. Derselbe besteht, Fig. 143, aus vier gleichlangen Linealen MA, AB, CD, DE, welche in A, F, D, G so mit einander verbunden sind, daß $AFDG$ ein verschiebbares Parallelogramm bildet. Die Punkte M, D, B, liegen alsdann in Einer geraden Linie. Wenn nun der Punkt M auf dem Papier befestigt und der Punkt B auf dem Umfange einer gegebenen Figur x herumgeführt wird, so beschreibt der Punkt D eine der gegebenen ähnliche Figur y. Das Verhältniß der

Fig. 143.



Seiten dieser beiden Figuren ist gleich dem Verhältniß $MA : MF$, d. h. die gegebene Figur wird in dem Verhältnisse $MA : MF$ verjüngt.

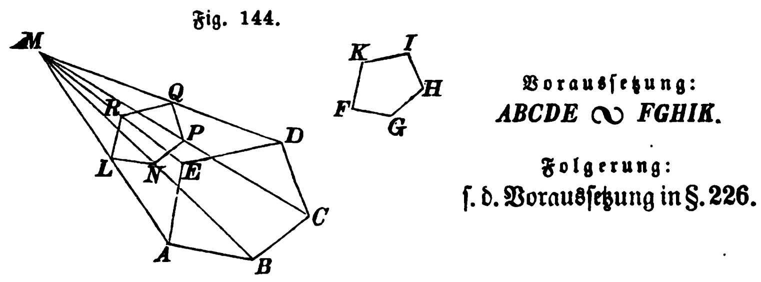
Auf derselben Aufgabe beruhet, bei dem topographischen Aufnehmen vermittelst des Meßtisches, das sogenannte Aufnehmen aus Einem Punkte, worüber die praktische Geometrie weitere Auskunft giebt.

§. 228.

Lehrsatz. Ähnliche Figuren können immer so in ein Strahlensystem gelegt werden, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden.

(Umkehrung des Lehrsatzes §. 226.)

Fig. 144.



Voraussetzung: $ABCDE \backsim FGHIK$.

Folgerung: s. d. Voraussetzung in §. 226.

Beweis. Man wähle einen beliebigen Punkt M und ziehe aus diesem Punkte Strahlen MA, MB, MC, MD, ME nach allen Eckpunkten der gegebenen Figur $ABCDE$. Auf dem Strahle MA nehme man einen Punkt L so an, daß

$$MA : ML = AB : FG \qquad (1.)$$

wird, ziehe $LN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $PQ \parallel CD$, $QR \parallel DE$, und endlich die gerade Linie LR. Alsdann ist nach §. 204

$$MA : ML = MB : MN = MC : MP = MD : MQ = ME : MR,$$

d. h. die beiden Figuren $ABCDE$ und $LNPQR$ liegen so in einem Strahlensystem, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden.

Es bleibt nun noch zu beweisen übrig, daß $FGHIK$ mit $LNPQR$ zur Deckung gebracht werden kann. Zu dem Ende hat man nach §. 210

$$MA : ML = AB : LN \qquad (2.)$$

und aus (1) und (2) folgt nach §. 207

$$FG = LN.$$

Ferner hat man aus §. 226

$$ABCDE \sim LNPQR,$$

und wenn man hiezu die Voraussetzung nimmt, so folgt nach §. 218

$$FGHIK \sim LNPQR.$$

Die beiden Figuren *FGHIK* und *LNPQR* sind mithin ähnlich, und zugleich hat das Verhältniß von einem Paar gleichliegender Seiten, *FG* : *LN*, den Werth Eins; oder es ist (s. §. 217)

$$FGHIK \equiv LNPQR.$$

Man kann also *FGHIK* an die Stelle von *LNPQR* legen, d. h. man kann *FGHIK* und *ABCDE* so in ein Strahlensystem legen, daß alle Strahlen durch die Umfänge der Figuren in gleichen Verhältnissen geschnitten werden, w. z. b. w.

§. 229.

Zusatz. Ähnliche Figuren können immer in eine solche Lage gebracht werden, daß ihre Seiten beziehungsweise parallel liegen.

Und wenn man in dieser Lage der beiden ähnlichen Figuren jede zwei gleichliegenden Eckpunkte derselben durch eine gerade Linie verbindet, so schneiden sich alle diese Verbindungslinien in Einem Punkte.

Der zuletzt genannte Punkt, welcher dem Strahlenpunkte *M* in den Fig. 142 und 144 entspricht, wird auch der Ähnlichkeitspunkt der beiden Figuren, in der vorausgesetzten Lage derselben, genannt. Wenn man in diesen Punkt das Auge bringt und von ihm aus die beiden Figuren betrachtet, so scheinen diese Figuren einander Punkt für Punkt zu decken; die Ähnlichkeit der Figuren erscheint also hier wie eine Art von optischer oder perspectivischer Deckung, und tritt damit in ein coordinirtes Verhältniß zu der Congruenz der Figuren, welche eine wirkliche Deckung fordert.

Das Strahlensystem mit nicht parallelen Transversalen.

§. 230.

Erklärung. Unter einem Doppelverhältniß von Linien versteht man das geometrische Verhältniß zweier Verhältnisse unter Linien.

Der Gebrauch des Doppelverhältnisses ist folgender. Es sei *AB*, Fig. 145, eine gerade Linie, welche durch den Punkt *C* in die beiden Theile *AC* und *BC* zerlegt wird, und ebenso sei *DE* eine gerade Linie, welche durch den Punkt *F* in die beiden Theile *DF* und *EF* zerfällt. Alsdann sind $AC : BC$ und $DF : EF$ die Verhältnisse unter den Theilen dieser Linien. Diese Verhältnisse sind aber Zahlen (s. §. 200), man kann demnach wieder das geometrische Verhältniß (s. Arith. §. 137) dieser beiden Verhältnisse bilden, und erhält so das Doppelverhältniß

Fig. 145.

A —— C —— B

D —— F —————— E

$$(AC : BC) : (DF : EF)$$

oder wie man hier bequemer schreibt

$$\frac{AC}{BC} : \frac{DF}{EF}.$$

Die Theilpunkte *C* und *F* müssen nicht nothwendig, wie in Fig. 145, innerhalb der Linien *AB* und *DE* angenommen werden, sondern können auch irgendwo in die Verlängerung dieser Linien fallen.

Anmerkung. Wenn ein Doppelverhältniß den Werth Eins annimmt, so geht es in eine Proportion über. Z. B. wenn man hat

$$\frac{AC}{BC} : \frac{DF}{EF} = 1,$$

so folgt sogleich

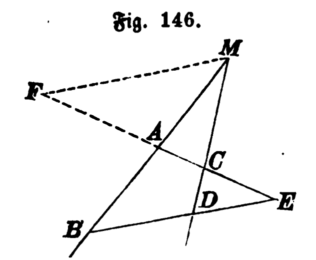
$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF},$$

d. i. $AC : BC = DF : EF$.

§. 231.

Lehrsatz des Menelaus. Wenn zwei Strahlen von zwei nicht parallelen Transversalen geschnitten werden, so daß die Abschnitte, welche die eine dieser Transversalen auf den Strahlen hervorbringt, durch die andere Transversale in je zwei Theile zerfallen, so ist das Doppelverhältniß unter diesen Theilen gleich dem umgekehrten Verhältniß unter den Theilen der ersten Transversale.

Fig. 146.



Voraussetzung:
AC theilt die Abschnitte *MB* und *MD*.

Folgerung:
$$\frac{MA}{AB} : \frac{M}{CD} = DE : BE.$$

Beweis. Man ziehe durch den Strahlenpunkt *M* zu der Transversale *BD* die Parallele *MF*, welche die Transversale *AC* in *F* trifft. Alsdann ist nach §. 210, indem man *A* wie Strahlenpunkt ansieht,
$$MA : AB = FM : BE$$
und ebenso, indem man *C* wie Strahlenpunkt ansieht,
$$MC : CD = FM : DE;$$
folglich
$$\frac{MA}{AB} : \frac{MC}{CD} = \frac{FM}{BE} : \frac{FM}{DE}.$$

Aber aus der Arithmetik §. 149 folgt
$$\frac{FM}{BE} : \frac{FM}{DE} = DE : BE,$$
mithin ist
$$\frac{MA}{AB} : \frac{MC}{CD} = DE : BE,$$
w. z. b. w.

Anmerkung. Man hätte im Lehrsatze nach Vertauschung der Transversalen *AC* und *BD*, auch schreiben können
$$\frac{MB}{BA} : \frac{MD}{DC} = CE : AE.$$
In diesem Falle theilt *BD* die Abschnitte *MA* und *MC* in den Punkten *B* und *D*, welche in den Verlängerungen dieser Abschnitte liegen (s. d. vorigen Paragraph).

In derselben Figur kann man übrigens auch jeden der fünf anderen Schnittpunkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E* wie Strahlenpunkt ansehen, ohne daß der Lehrsatz aufhört richtig zu sein. So findet man z. B. wenn *B* Strahlenpunkt ist
$$\frac{BA}{AM} : \frac{BE}{ED} = DC : MC.$$
und $$\frac{BM}{MA} : \frac{BD}{DE} = EC : AC.$$

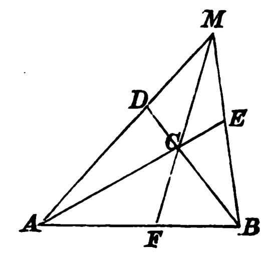
Auf diese Weise kann der vorstehende Lehrsatz in derselben Figur durch zwölf verschiedene Proportionen ausgedrückt werden.

Der hier bewiesene Lehrsatz kommt in den Elementen des Euklides nicht vor. Er findet sich zuerst in der Sphärik des Menelaus, welcher zu Alexandria um das Jahr 80 nach Chr. Geb. schrieb, und bildet den Ausgangspunkt für eine Reihe von Untersuchungen, die man unter dem Namen der „neueren Geometrie" zusammenzufassen pflegt und von denen hier nur die ersten Anfangsgründe gegeben werden können.

§. 232.

Lehrsatz. Wenn drei Strahlen die Eckpunkte eines Dreiecks treffen, so werden sie durch die diesen Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten oder die Verlängerungen derselben so geschnitten, daß das Doppelverhältniß unter den Theilen je zweier Strahlen gleich dem umgekehrten Verhältniß unter den Theilen der verbindenden Dreiecksseite ist.

Fig. 147.



Voraussetzung:

$\triangle\, ABC$ getroffen von den Strahlen MA, MB, MC.

Folgerung:

$$\frac{MD}{DA} : \frac{ME}{EB} = BF : AF.$$

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatze hat man

$$\frac{MD}{DA} : \frac{MC}{CF} = FB : AB$$

$$\frac{ME}{EB} : \frac{MC}{CF} = FA : BA$$

und aus beiden Proportionen folgt

$$\frac{MD}{DA} : \frac{ME}{EB} = BF : AF,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Im Lehrsatze hätte man auch schreiben können

$$\frac{MD}{DA} : \frac{MF}{FC} = CE : AE$$

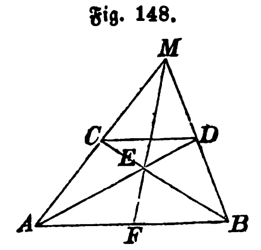
und $\frac{ME}{EB} : \frac{MF}{FC} = CD : BD.$

Ferner kann man auch jeden der drei Punkte *A*, *B*, *C* wie Strahlenpunkt ansehen, so daß mithin in derselben Figur der vorstehende Lehrsatz durch zwölf verschiedene Proportionen ausgedrückt werden kann.

§. 233.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie ohne Gebrauch des Zirkels in zwei gleiche Theile zu theilen.

Fig. 148.



Gegeben:
Linie *AB*.

Gesucht:
$\frac{1}{2}$ *AB*.

Construction. Man wähle außerhalb der gegebenen geraden Linie *AB* einen Punkt *M*, ziehe aus *M* die beiden Strahlen *MA* und *MB*, lege durch diese Strahlen die Transversale *CD* $\|$ *AB*, ziehe *AD* und *BC*, und endlich durch deren Schnittpunkt *E* den Strahl *ME*, welcher die gegebene Linie *AB* in *F* halbiren wird.

Beweis. Nach §. 232 ist

$$\frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = BF : AF.$$

Ferner ist nach §. 205 aus der Construction

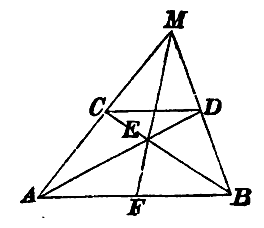
$$MC : CA = MD : DB, \text{ d. i. } \frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = 1.$$

Folglich auch

$$BF : AF = 1, \text{ d. i. } BF = AF, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 234.

Aufgabe. Zu einer gegebenen geraden Linie durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu legen.



Gegeben:
Linie *AB* und Punkt *C*.

Gesucht:
Parallele zu *AB* durch *C*.

Construction. Man trage auf der gegebenen geraden Linie AB einen willkürlichen Theil AF zweimal ab, $AF = FB$, verbinde A mit C durch die gerade Linie AC, wähle in der Verlängerung dieser Linie einen Punkt M, aus welchem man die Strahlen MF und MB zieht, verbinde B mit C, lege durch den Schnittpunkt E die Transversale AE, welche MB in D schneidet, und endlich durch C und D die Transversale CD, welche die gesuchte Parallele sein wird.

Beweis. Nach §. 232 ist

$$\frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = BF : AF.$$

Ferner ist nach der Construction

$$BF = AF, \text{ d. i. } BF : AF = 1.$$

Folglich auch

$$\frac{MC}{CA} : \frac{MD}{DB} = 1, \text{ d. i. } MC : CA = MD : DB,$$

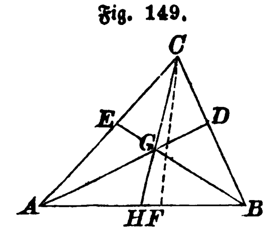
und daraus folgt nach §. 209

$$CD \parallel AB, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 235.

Lehrsatz. Die Transversalen aus den drei Eckpunkten eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten durchschneiden sich in Einem Punkte.

Fig. 149.



Voraussetzung:
$AF = FB$
$BD = DC$
$AE = EC.$

Folgerung:
AD, BE, CF gehen durch Einen Punkt.

Beweis. Es sei G der Durchschnittspunkt der beiden Transversalen AD und BE. Man ziehe CG und verlängere diese Linie, bis sie die Seite AB in H trifft.

Gesetzt nun, der Punkt H falle nicht mit der Mitte F der Seite AB zusammen. Alsdann hat man nach §. 232, indem man C wie Strahlenpunkt ansieht,

$$\frac{CE}{EA} : \frac{CD}{DB} = BH : AH.$$

Aber vermöge der Voraussetzung ist $\frac{CE}{EA} = 1$ und $\frac{CD}{DB} = 1$, folglich auch

$$BH : AH = 1, \text{ d. i. } BH = AH,$$

und dieses widerspricht der Voraussetzung $AF = FB$.

Der Widerspruch hört nur auf, wenn H mit F zusammenfällt. Also gehen die drei Transversalen AD, BE und CF durch denselben Punkt G, w. z. b. w.

Anmerkung. Die vier Punkte des Dreiecks, welche in den §§. 183, 184, 186 und 235 nachgewiesen worden sind, werden die vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks genannt.

§. 236.

Erklärung. Vier Punkte einer geraden Linie werden **harmonische Punkte** genannt, wenn sie diese gerade Linie so zerlegen, daß der erste Theil zum zweiten sich verhält, wie die ganze Linie zum dritten Theil.

Der erste und dritte Punkt, so wie der zweite und vierte Punkt werden einander zugeordnete Punkte genannt.

Fig. 150.

A F B G

So sind in Fig. 150 die Punkte A, F, B, G vier harmonische Punkte, wenn die Proportion stattfindet

$$AF : FB = AG : GB.$$

Die Punkte A und B, sowie F und G sind einander zugeordnete Punkte.

Man kann AB wie eine gegebene Linie ansehen, welche durch den inneren Theilpunkt F in dem Verhältnisse $AF : FB$, und durch den äußeren Theilpunkt G in dem gleichen Verhältnisse $AG : GB$ getheilt ist. Denn die Gleichsetzung dieser Verhältnisse giebt wieder die obige Proportion.

Man kann aber auch FG wie eine gegebene Linie ansehen, welche durch den inneren Theilpunkt B in dem Verhältnisse $GB : BF$, und durch den äußeren Theilpunkt A in dem gleichen Verhältnisse $GA : AF$ getheilt ist. Denn die Gleichsetzung dieser Verhältnisse giebt

$$GB : BF = GA : AF$$

und hieraus entspringt durch Vertauschung der äußeren Glieder unter einander (Arithmetik §. 150) wieder die obige Proportion.

Nach §. 215 läßt sich von vier harmonischen Punkten überdies

noch aussagen, daß sie eine gerade Linie so zerlegen, daß das Rechteck aus den äußeren Theilen gleich dem Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittleren Theile wird. Denn die Proportion

$$AF : FB = AG : GB$$

giebt

$$\square\ AF \,.\, GB = \square\ AG \,.\, FB.$$

Der mittlere Theil ist immer kleiner als jeder der beiden äußeren Theile.

Anmerkung. Der Zusammenhang der harmonischen Punkte mit der harmonischen Proportion (Arithm. §. 155) ist folgender: Die Proportion

$$AF : FB = AG : GB$$

kann man nach Fig. 150 auch schreiben

$$(AG - FG) : (FG - BG) = AG : BG;$$

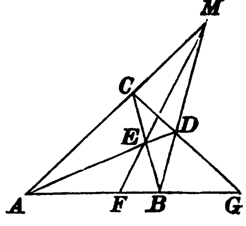
und wenn man die Linien *AG, FG, BG* durch einerlei Einheit gemessen und in Zahlen ausgedrückt annimmt, so erkennt man hier unmittelbar eine stetige harmonische Proportion zwischen den drei Gliedern *AG, FG* und *BG*.

§. 237.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu finden.

Der gesuchte Punkt kann ein innerer oder ein äußerer sein, und daher sind zwei Fälle zu betrachten.

Fig. 151.



1) Gegeben *A, B, G.*
Gesucht *F.*

2) Gegeben *A, F, B.*
Gesucht *G.*

Construction. 1) Aus dem willkürlich gewählten Punkte *M* ziehe man die beiden Strahlen *MA* und *MB*, schneide dieselben aus *G* durch die Transversale *CD*, ziehe *AD* und *BC*, und durch den Durchschnittspunkt *E* dieser beiden Linien den Strahl *ME*, welcher den gesuchten Punkt *F* ergiebt.

2) Aus dem willkürlich gewählten Punkte *M* ziehe man die drei Strahlen *MA*, *MF* und *MB*, schneide die beiden ersten aus *D* durch die Transversale *EC* und die beiden letzten aus *A* durch die Transversale *ED*, und ziehe *CD*, welche Linie verlängert den gesuchten Punkt *G* ergiebt.

Beweis. Nach §. 232 ist

$$\frac{MD}{DB} : \frac{MC}{CA} = AF : BF$$

und nach §. 231

$$\frac{MD}{DB} : \frac{MC}{CA} = AG : BG,$$

folglich

$$AF : FB = AG : GB,$$

w. z. b. w.

Determination. Der gegebene Punkt *F* in 2) darf nicht in der Mitte von *AB* liegen. Denn wenn dieser Fall eintritt, so entsteht die Figur 148, §. 234, und ein Punkt *G* kommt nicht zu Stande.

§. 238.

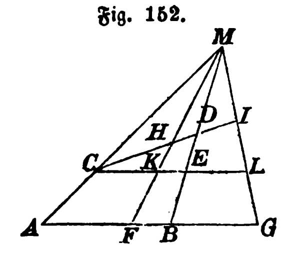
Erklärung. Vier Strahlen eines Strahlensystems werden harmonische Strahlen genannt, wenn sie durch vier harmonische Punkte gehen.

Der erste und dritte Strahl, so wie der zweite und vierte Strahl werden einander zugeordnete Strahlen genannt.

§. 239.

Lehrsatz. Jede Transversale, welche durch vier harmonische Strahlen geht, wird durch dieselben in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Fig. 152.



Voraussetzung:
$AF : FB = AG : GB.$

Folgerung:
$CH : HD = CI : ID.$

Beweis. Zieht man durch C eine Transversale $CL \parallel AG$, so folgt aus §. 210 Anm., daß die Abschnitte der Transversale CL unter sich dieselbe Proportion bilden, wie die gleichliegenden Abschnitte von AG. Man hat also in Folge der Voraussetzung

$$CK : KE = CL : LE, \text{ d. i. } \frac{CK}{KE} = \frac{CL}{LE}.$$

Ferner ist aus §. 231, indem man C wie Strahlenpunkt ansieht,

$$\frac{CH}{HD} : \frac{CK}{KE} = EM : DM,$$

und ebenso

$$\frac{CI}{ID} : \frac{CL}{LE} = EM : DM;$$

und da in diesen beiden Proportionen das zweite, dritte und vierte Glied beziehungsweise gleich sind, so müssen auch die Anfangsglieder gleich sein; oder es ist

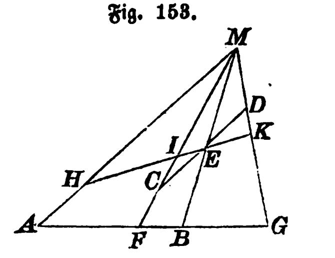
$$\frac{CH}{HD} = \frac{CI}{ID}, \text{ d. i. } CH : HD = CI : ID,$$

w. z. b. w.

§. 240.

Lehrsatz. Jede Transversale, welche einem von vier harmonischen Strahlen parallel ist, wird durch den ihm zugeordneten Strahl in zwei gleiche Theile getheilt.

Fig. 153.



Voraussetzung:
$AF : FB = AG : GB$,
$CD \parallel AM$.

Folgerung:
$CE = ED$.

Beweis. Legt man durch den Punkt E eine beliebige Transversale HK durch die vier Strahlen, so ist nach dem vorigen Lehrsatze

$$HI : IE = HK : KE.$$

Ferner ist nach §. 210, indem man I wie Strahlenpunkt ansieht,

$$HI : IE = HM : CE$$

und ebenso, indem man *K* wie Strahlenpunkt ansieht,

$$HK : KE = HM : ED.$$

Hieraus schließt man mit Rücksicht auf die obige Proportion, daß

$$HM : CE = HM : ED,$$

folglich ist

$$CE = ED,$$

w. z. b. w.

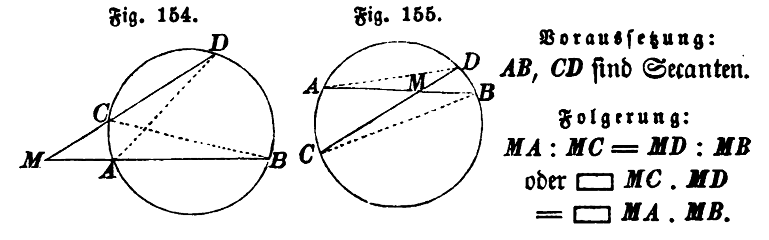
Anmerkung. Dieser Lehrsatz kann auch umgekehrt werden, und liefert in dieser Gestalt eine zweite Auflösung der Aufgabe §. 237, welche indessen hier übergangen wird.

Der Kreis in einem Strahlensystem.

§. 241.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen einen Kreis schneiden, so bilden die vier Abschnitte der Strahlen eine Proportion, deren innere Glieder die Abschnitte des einen Strahls und deren äußere Glieder die Abschnitte des anderen Strahls sind.

Oder: Das Rechteck aus den Abschnitten des einen Strahls ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten des anderen Strahls.



Voraussetzung: *AB*, *CD* sind Secanten.

Folgerung: $MA : MC = MD : MB$ oder $\square\, MC \,.\, MD = \square\, MA \,.\, MB$.

Beweis. Man ziehe die Sehnen *AD* und *BC*. Dadurch entstehen zwei Dreiecke *MAD* und *MBC*, in denen man hat

$$\angle AMD = \angle BMC,$$
$$\angle MDA = \angle MBC \text{ (nach §. 176).}$$

Folglich ist aus §. 220

$$\triangle MAD \sim \triangle MBC,$$

und daraus nach §. 217

$$MA : MC = MD : MB,$$

wofür man nach §. 215 auch setzen kann

$$\square\, MC \,.\, MD = \square\, MA \,.\, MB,$$

w. z. b. w.

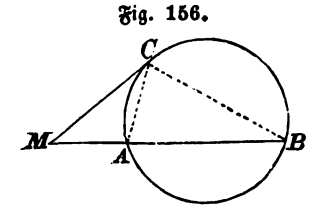
Der Beweis bleibt derselbe, der Strahlenpunkt M mag außerhalb (Fig. 154) oder innerhalb (Fig. 155) des Kreises liegen.

§. 242.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen einen Kreis treffen, von denen der eine Tangente des Kreises ist, so ist die Tangente mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Secante.

Oder: Das Quadrat über der Tangente ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Secante.

Fig. 156.



Voraussetzung:
MC ist eine Tangente.

Folgerung:
$MA : MC = MC : MB$
oder $\square\, MC = \square\, MA \,.\, MB$.

Beweis. Man ziehe die Sehnen AC und BC. Dadurch entstehen zwei Dreiecke MAC und MBC, in denen man hat

$$\angle AMC = \angle BMC,$$
$$\angle MCA = \angle MBC \text{ (nach §. 176).}$$

Folglich ist aus §. 220

$$\triangle MAC \sim \triangle MBC,$$

und daraus folgt nach §. 217

$$MA : MC = MC : MB,$$

wofür man nach §. 215 auch setzen kann

$$\square\, MC = \square\, MA \,.\, MB,$$

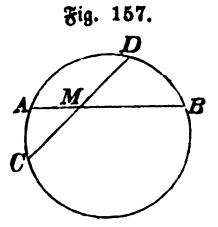
w. z. b. w.

§. 243.

Lehrsatz. Wenn zwei Strahlen einen Kreis treffen, von denen der eine Hälfte einer Sehne ist, so ist die halbe Sehne mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der anderen Sehne.

Oder: Das Quadrat über der halben Sehne ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sehne.

Fig. 157.



Voraussetzung:
$MC = \frac{1}{2} CD.$

Folgerung:
$MA : MC = MC : MB$
oder $\square\, MC = \sqsubset\!\sqsupset\, MA \,.\, MB.$

Beweis. Nach §. 241 hat man

$$MA : MC = MD : MB.$$

Aber nach der Voraussetzung ist $MC = MD$; folglich auch

$$MA : MC = MC : MB$$

oder nach §. 215

$$\square\, MC = \sqsubset\!\sqsupset\, MA \,.\, MB,$$

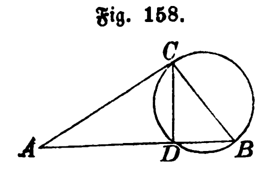
w. z. b. w.

§. 244.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus dem Scheitelpunkte des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse fällt, so ist jede Kathete dieses Dreiecks mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der Hypotenuse.

Oder: Das Quadrat über jeder Kathete ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte der Hypotenuse.

Fig. 158.



Voraussetzung:
$\angle ACB = R,$
$CD \perp AB.$

Folgerung:
$AB : AC = AC : AD$
oder $\square\, AC = \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, AD.$

Beweis. Man construire einen dem rechtwinkeligen Dreiecke *CDB* umschriebenen Kreis, dessen Mittelpunkt nach §. 183 in die *Mitte von BC* fallen wird. Alsdann ist *AC* Tangente dieses

Kreises (§. 143) und AB Secante desselben (§. 144); folglich hat man nach §. 242

$$AB : AC = AC : AD$$

oder

$$\square\, AC = \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, AD,$$

w. z. b. w.

Hätte man ebenso dem rechtwinkeligen Dreiecke ADC einen Kreis umschrieben, so würde man auf demselben Wege gefunden haben

$$AB : CB = CB : DB$$

oder

$$\square\, CB = \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, DB,$$

womit derselbe Lehrsatz noch einmal ausgesprochen ist.

Anmerkung. Aus diesem Lehrsatze kann der Lehrsatz des Pythagoras neu bewiesen werden. Man hat nämlich

$$\square\, AC = \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, AD$$
$$\square\, CB = \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, DB$$

und daraus wird durch Addition

$$\square\, AC + \square\, CB = \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, AD + \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, DB.$$

Nun können aber die Rechtecke $\sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, AD$ und $\sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, DB$ leicht addirt werden, indem man sie mit einer gleichen Seite sich an einander gelegt denkt. Alsdann erhält man

$$\sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, AD + \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, DB = \square\, AB,$$

folglich ist

$$\square\, AC + \square\, CB = \square\, AB,$$

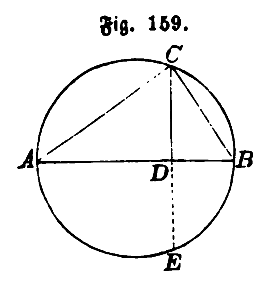
w. z. b. w.

§. 245.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus dem Scheitelpunkte des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse fällt, so ist dieses Perpendikel mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Oder: Das Quadrat über dem Perpendikel ist gleich dem Rechteck aus den *beiden Abschnitten* der Hypotenuse.

Fig. 159.



Voraussetzung:

$\angle ACB = R$

$CD \perp AB$.

Folgerung:

$AD : CD = CD : BD$

oder $\square\, CD = \sqsubset\!\sqsupset\, AD \,.\, BD$.

Beweis. Man construire einen dem rechtwinkeligen Dreiecke *ABC* umschriebenen Kreis, dessen Mittelpunkt nach §. 183 in die Mitte von *AB* fallen wird. Alsdann ist *CD* Hälfte einer Sehne *CE* (§. 151), folglich hat man nach §. 243

$$AD : CD = CD : BD$$

oder

$$\square\, CD = \sqsubset\!\sqsupset\, AD \,.\, BD$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Die beiden vorstehenden Lehrsätze können auch als Lehrsätze vom Kreise ausgesprochen werden, nämlich an Fig. 159 wie folgt:

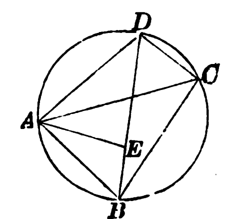
§. 244. Die Sehne *AC* ist mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser *AB* und dem anliegenden Abschnitte *AD* des Durchmessers.

§. 245. Das Perpendikel *CD* ist mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten *AD* und *BD* des Durchmessers.

§. 246.

Lehrsatz des Ptolemäus. In jedem eingeschriebenen Vierecke ist das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den einander gegenüberliegenden Seiten.

Fig. 160.



Voraussetzung:

ABCD ein eingeschriebenes Viereck.

Folgerung:

$\sqsubset\!\sqsupset\, AC \,.\, BD = \sqsubset\!\sqsupset\, AB \,.\, CD + \sqsubset\!\sqsupset\, AD \,.\, BC$.

Beweis. Man ziehe aus einem Eckpunkte A die Linie AE so, daß $\angle BAE = \angle DAC$ wird. Alsdann hat man

$\angle BAE = \angle DAC$ nach der Construction
$\angle ABE = \angle ACD$ nach §. 176,

folglich nach §. 220

$$\triangle ABE \sim \triangle ACD$$

und daraus nach §. 217

$$AB : AC = BE : CD,$$

d. i. nach §. 215

$$\square AC . BE = \square AB . CD. \qquad (1.)$$

Ebenso hat man

$\angle DAE = \angle BAC$ nach der Construction
$\angle ADE = \angle ACB$ nach §. 176

und daraus wie vorhin

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB$$
$$AD : AC = DE : BC$$
$$\square AC . DE = \square AD . BC. \qquad (2.)$$

Wenn man nun die Gleichungen (1) und (2) addirt und dabei beachtet, daß $\square AC . BE$ und $\square AC . DE$ zur Summe geben $\square AC . BD$, so folgt

$$\square AC . BD = \square AB . CD + \square AD . BC,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Diesen Lehrsatz hat zuerst der Astronom Ptolemäus zu Alexandria um 150 nach C. G. in seinem Almagest (in der Trigonometrie wird davon weiter die Rede sein) gegeben und zur Berechnung seiner trigonometrischen Tafeln angewandt.

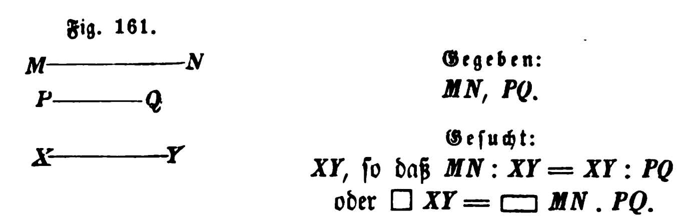
Man kann aus diesem Satze wiederum den Lehrsatz des Pythagoras neu beweisen. Zu diesem Zwecke hat man nämlich nur nöthig, das eingeschriebene Viereck $ABCD$ als Rechteck vorauszusetzen, womit sowohl die gegenüberliegenden Seiten als auch die Diagonalen desselben beziehungsweise gleich groß werden.

§. 247.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu finden.

Oder: Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 161.



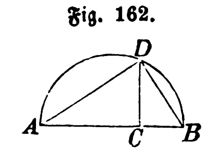
Gegeben:
MN, *PQ*.

Gesucht:
XY, so daß *MN* : *XY* = *XY* : *PQ*
oder □ *XY* = ▭ *MN* . *PQ*.

Da die mittlere Proportionale entweder Tangente (§. 242, 244) oder halbe Sehne (§. 243, 245) sein kann, so sind zwei Auflösungen möglich.

Erste Construction. Man trage die beiden gegebenen geraden Linien *AB* = *MN* und *AC* = *PQ* aus einerlei Punkte *A* auf einander ab, construire über der größeren derselben, *AB*, als Durchmesser, einen Halbkreis, errichte in dem Punkte *C* ein Perpendikel *CD*, welches diesen Halbkreis in *D* trifft, und ziehe *AD*. Alsdann ist *AD* die gesuchte mittlere Proportionale zu *AB* und *AC*.

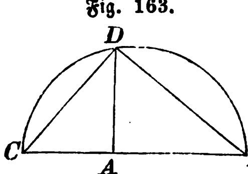
Fig. 162.



Zum Beweise ziehe man *BD*, und wende die §§. 68 und 244 an.

Zweite Construction. Man trage die beiden gegebenen geraden Linien *AB* = *MN* und *AC* = *PQ* aus einerlei Punkte *A* nach verschiedenen Seiten auf einer geraden Linie ab, construire über *CB*, als Durchmesser, einen Halbkreis, und errichte in dem Punkte *A* ein Perpendikel *AD*, welches diesen Halbkreis in *D* trifft. Alsdann ist *AD* die gesuchte mittlere Proportionale zu *AB* und *AC*.

Fig. 163.



Zum Beweise ziehe man *BD* und *CD*, und wende die §§. 68 und 245 an.

Anmerkung 1. Die Aufgabe: Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, ist schon im §. 129 zur Auflösung gekommen, und es ist nicht schwer zu erkennen, daß die hier gegebene erste Construction mit der obigen Auflösung dieser Aufgabe im Wesentlichen zusammenfällt.

Wenn die beiden gegebenen Linien in Zahlen gegeben sind (§. 197), so findet man ihre mittlere Proportionale durch Rechnung nach Arithm. §. 153. Denn setzt man $MN = a$, $PQ = b$, und die Unbekannte $XY = x$, so wird

$$a : x = x : b$$

und daraus

$$x = \sqrt{ab}.$$

Der vorstehende Paragraph löst demnach auf doppelte Weise die Aufgabe, eine Quadratwurzel geometrisch darzustellen. Anwendungen hiervon findet man in den §§. 191 und 193 der Arithmetik.

Anmerkung 2. Auf ähnliche Weise ist die Aufgabe zu behandeln: Zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionale zu finden, oder: Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Grundlinie (oder Höhe) gegeben ist. Man kann dabei wieder die beiden vorstehenden Figuren benutzen, in denen jedoch AB und AD, oder AC und AD wie die gegebenen Linien angenommen werden müssen.

Wenn die beiden gegebenen Linien in Zahlen gegeben sind, so findet man ihre dritte Proportionale durch Rechnung nach Arithmetik §. 152. Denn sind a und b die beiden gegebenen Linien und bezeichnet man mit x die gesuchte dritte Proportionale derselben, so hat man

$$a : b = b : x$$

und daraus

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

Beispiel (aus einem indischen Rechenbuche). Auf einem See schwankte die Blüthe einer Wasserlilie eine Spanne über dem Wasserspiegel, und wenn sie durch einen sanften Zephyr bewegt wurde, sank sie in fünf Spannen Entfernung ins Wasser. Wie tief war der See?

Antwort: 12 Spannen.

§. 248.

Erklärung. Eine Linie heißt nach stetiger Proportion getheilt, wenn der größere Abschnitt derselben mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitte ist.

Oder: Wenn das Quadrat über dem größeren Abschnitte gleich dem Rechteck aus der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitte ist.

Diese Theilung, welche sich schon bei Euklides findet, wurde im Mittelalter mit besonderer Vorliebe behandelt, wo man sie die **Sectio aurea** oder den goldenen Schnitt nannte.

Anmerkung. Zeising hat das Verdienst, zuerst nachgewiesen zu haben, daß der goldene Schnitt eine Grundregel der Aesthetik bildet und der mannigfaltigsten Anwendungen im Gebiete der schönen Künste fähig ist. Der menschliche Körper erscheint nach stetiger Proportion getheilt (z. B. die ganze Länge des Körpers wird durch die Taille nach diesem Gesetze getheilt u. s. w.), und die Kleidung fährt nach demselben Gesetze fort zu theilen, wenn ihre Verhältnisse auf das Prädicat „schön" Anspruch machen sollen. In der Architectur, in dem Bau der Möbeln, der Monumente rc. beruhen alle schönen Verhältnisse auf der Theilung nach stetiger Proportion. Das Format der Bücher, der Gemälde, der Briefcouverts, Visitenkarten, Banknoten rc. macht dem Auge einen gefälligen Eindruck, wenn die Breite aus der Länge durch Theilung nach stetiger Proportion abgeleitet werden kann. — Diese Beispiele lassen sich leicht vermehren (s. die Schrift des Verfassers: Der goldene Schnitt und die Anwendung desselben in der Kunst, Hannover 1874).

§. 249.

Lehrsatz. Wenn eine Linie nach stetiger Proportion getheilt ist, und man den kleineren Abschnitt derselben auf dem größeren abträgt, so wird der letztere gleichfalls nach stetiger Proportion getheilt.

Fig. 164.

A———E———C———D

Voraussetzung:

$$AD : AC = AC : CD$$
$$AE = CD.$$

Folgerung:

$$AC : AE = AE : EC.$$

Beweis. Aus der Proportion

$$AD : AC = AC : CD$$

folgt nach §. 150 (10) der Arithmetik

$$(AD - AC) : AC = (AC - CD) : CD.$$

Aber in Folge der Voraussetzung ist

$$AD - AC = AE,\ AC - CD = EC,\ CD = AE,$$

und durch die Substitution dieser Werthe verwandelt sich die vorige Proportion in

$$AE : AC = EC : AE$$

oder durch Vertauschung der äußeren Glieder mit den inneren

$$AC : AE = AE : EC,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Man kann auch umgekehrt sagen: Wenn eine nach stetiger Proportion getheilte Linie um ihren größeren Abschnitt verlängert wird, so entsteht wieder eine nach stetiger Proportion getheilte Linie. Es lassen sich demnach aus einer gegebenen nach stetiger Proportion getheilten Linie unzählige andere Linien von derselben Beschaffenheit ableiten, sowohl durch Abtragen des kleineren Abschnitts auf dem größeren, als auch durch Verlängern der ganzen Linie um den größeren Abschnitt.

§. 250.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie nach stetiger Proportion zu theilen.

Fig. 165.

A X B

Gegeben:

Linie *AB*.

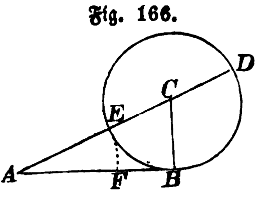
Gesucht:

Punkt *X*, so daß $AB : AX = AX : XB$.

Da die mittlere Proportionale entweder Tangente (§. 242) oder halbe Sehne (§. 243) sein kann, so sind zwei Auflösungen möglich.

Erste Construction. Man errichte in einem Endpunkte *B* der gegebenen Linie *AB* ein Perpendikel $BC = \frac{1}{2} AB$, construire aus *C* als Mittelpunkt mit *CB* als Halbmesser einen Kreis, schneide diesen Kreis aus *A* durch die Secante *AD*, und trage *AE* aus *A* auf der gegebenen Linie *AB* ab, bis *F*. Alsdann ist *F* der gesuchte Theilpunkt, oder es ist

Fig. 166.



$$AB : AF = AF : FB.$$

Beweis. Nach §. 242 ist

$$AD : AB = AB : AE$$

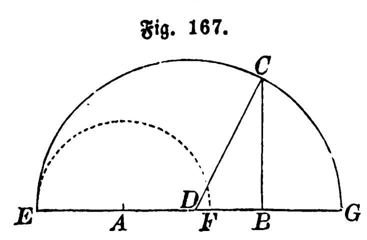
oder auch, da nach der Construction $AB = ED$ ist,

$$AD : ED = ED : AE,$$

d. i. die Linie AD ist im Punkte E nach stetiger Proportion getheilt und die Linie AB ist dem größeren Abschnitte derselben gleich. Wenn man also AE auf AB abträgt, so muß nach dem vorigen Paragraph auch AB nach stetiger Proportion getheilt werden, w. z. b. w.

Zweite Construction. Man errichte in einem Endpunkte B der gegebenen Linie AB ein Perpendikel $BC = AB$, verbinde C mit der Mitte D von AB durch die gerade Linie CD, construire aus D als Mittelpunkt mit DC als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von AB in E schneidet, und trage AE aus A auf der gegebenen Linie AB ab, bis F. Alsdann ist F der gesuchte Theilpunkt, oder es ist

Fig. 167.



$$AB : AF = AF : FB.$$

Beweis. Man vollende den Halbkreis bis G. Nach §. 243 ist

$$EB : BC = BC : BG$$

oder auch, da nach der Construction $BC = AB$ und $BG = AE$ ist,

$$EB : AB = AB : AE$$

d. h. die Linie EB ist im Punkte A nach stetiger Proportion getheilt und die Linie AB ist der größere Abschnitt derselben. Wenn man also AE auf AB abträgt, so muß nach dem vorigen Paragraph auch AB nach stetiger Proportion getheilt werden, w. z. b. w.

Anmerkung 1. Die vorstehenden beiden Constructionen lösen zugleich die Aufgabe: Eine gegebene gerade Linie so zu verlängern, daß sie der größere Abschnitt der nach stetiger Proportion getheilten neuen Linie wird. In beiden Figuren ist AE die gesuchte Verlängerung von AB, und der Punkt F fällt für diesen Zweck als unnöthig hinweg.

Anmerkung 2. Wenn die gegebene gerade Linie durch eine Zahl gegeben ist, so läßt sich die Theilung nach stetiger Proportion auch durch Rechnung ausführen. Es sei gegeben $AB = a$, und der gesuchte größere Abschnitt $AX = x$. Alsdann muß die Proportion stattfinden

$$a : x = x : (a - x),$$

woraus nach Arithmetik §. 259 folgt

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Da aber x nicht negativ werden darf, so muß von dem doppelten Vorzeichen nur das obere beibehalten werden, und man hat also

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1). \qquad (1.)$$

Wenn wie in Anm. 1 die Aufgabe vorliegt, eine gegebene gerade Linie a so zu verlängern, daß sie der größere Abschnitt der nach stetiger Proportion getheilten neuen Linie x wird, so muß die Proportion stattfinden

$$x : a = a : (x - a),$$

woraus folgt

$$x = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}). \qquad (2.)$$

Auf fünf Decimalstellen ist

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}61803 \text{ und } \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1{,}61803.$$

Die Werthe von x in (1) und (2) sind irrational, und mithin kann die Theilung nach stetiger Proportion durch ganze Zahlen und Brüche nicht mit vollkommener Schärfe ausgeführt werden. Will man eine angenäherte Auflösung, so bilde man die folgende Reihe von Zahlen, in welcher jede gleich der Summe der beiden vorhergehenden ist:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

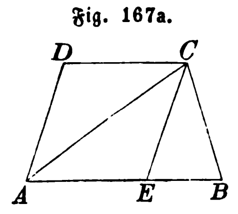
In dieser Reihe stellen jede drei auf einander folgende Zahlen (z. B. 5, 8, 13) angenähert die Theilung einer Linie nach stetiger Proportion dar, und zwar mit desto größerer Annäherung, je weiter diese Zahlen vom Anfange der Reihe entfernt sind. Der Beweis, welcher auf der Theorie der Kettenbrüche beruhet, kann hier nicht gegeben werden (s. Analysis §. 125).

§. 250a.

Lehrsatz. Wenn man in einem gleichschenkeligen Trapez,

dessen kleine Parallele gleich jeder der beiden nicht parallelen Seiten und dessen große Parallele gleich jeder der beiden Diagonalen ist, die kleine Parallele auf der großen abträgt, so wird diese nach stetiger Proportion getheilt und die kleine Parallele ist der größere Abschnitt derselben.

Fig. 167a.



Voraussetzung:

$$DC \parallel AB$$
$$DC = AD = BC$$
$$AB = AC.$$

Folgerung:

$$AB : DC = DC : (AB - DC).$$

Beweis. Man ziehe $CE \parallel DA$. Hierdurch wird die Parallele DC auf AB abgetragen, nämlich von A bis E.

Ferner sind die Dreiecke ABC und CBE gleichschenkelig und haben den Winkel B, als Winkel an der Grundlinie, mit einander gemein. Also sind auch die Winkel an den Spitzen dieser Dreiecke gleich groß, oder $\angle CAB = \angle ECB$, und da man überdies hat $\angle CAB = \angle ACE$, so halbirt die Linie CE den Winkel ACB. Daraus folgt nach §. 212

$$AC : BC = AE : EB$$

oder da $AC = AB$ und $BC = AE$ ist

$$AB : AE = AE : EB$$

d. h. die Linie AB wird im Punkte E nach stetiger Proportion getheilt.

Substituirt man in dieser letzten Proportion die Werthe $AE = DC$ und $EB = AB - DC$, so erhält man

$$AB : DC = DC : (AB - DC)$$

w. z. b. w.

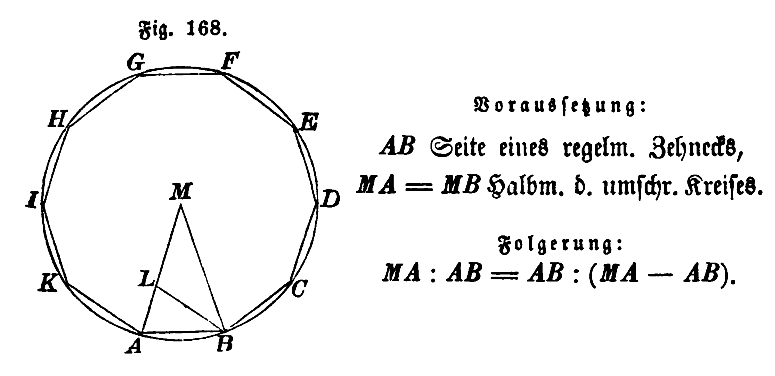
Anmerkung. Da die Linie CE den Winkel ACB halbirt, so folgt, daß $\angle CEB = 2 \angle CAB = 2 \angle ECB$, also $= \angle ABC = 72^\circ$ ist, woraus die Größe der übrigen Winkel dieses Trapez sich von selbst ergiebt.

Wie ein solches Trapez construirt werden kann, darüber sehe man den Schluß der Anmerkung 1 zu §. 252a.

§. 251.

Lehrsatz. Wenn man die Seite eines regelmäßigen Zehn=

ecks auf dem Halbmesser des dem Zehneck umschriebenen Kreises abträgt, so wird dieser Halbmesser nach stetiger Proportion getheilt und die Seite des Zehnecks ist der größere Abschnitt desselben.



Voraussetzung:

AB Seite eines regelm. Zehnecks,
$MA = MB$ Halbm. d. umschr. Kreises.

Folgerung:
$$MA : AB = AB : (MA - AB).$$

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $\angle AMB = 36^0$ und mithin $\angle MAB = \angle MBA = 72^0$. Wenn man ferner $\angle MBA$ durch die Linie BL in zwei gleiche Theile theilt, so wird $\angle MBL = \angle ABL = 36^0$ und $\angle ALB = 72^0$, folglich

1) $\triangle ALB$ gleichschenkelig, d. i. $AB = LB$
2) $\triangle MBL$ gleichschenkelig, d. i. $LB = ML$.

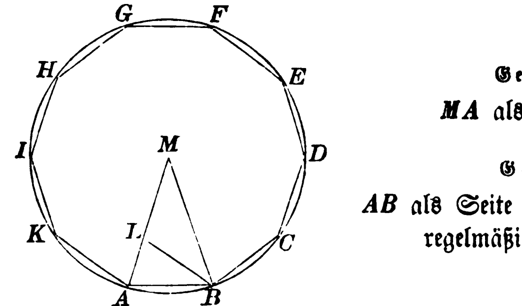
Daraus folgt
$$AB = ML$$
d. h. es ist durch diese Construction die Seite AB auf dem Halbmesser MA von M aus bis L abgetragen.

Ferner ist nach §. 212
$$MB : AB = ML : LA,$$
folglich auch, wenn man hierin die Werthe $MB = MA$ und $AB = ML$ substituirt,
$$MA : ML = ML : LA$$
d. h. der Halbmesser MA wird im Punkte L nach stetiger Proportion getheilt.

Substituirt man in der letzten Proportion die Werthe $ML = AB$ und $LA = MA - AB$, so erhält man
$$MA : AB = AB : (MA - AB),$$
w. z. b. w.

§. 252.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Zehneck zu construiren.



Gegeben:
MA als Halbmesser.

Gesucht:
AB als Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks.

Construction. Man theile nach §. 250 den gegebenen Halbmesser *MA* nach stetiger Proportion. Der größere Abschnitt desselben wird sich als Sehne zehnmal im Kreise abtragen lassen.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Paragraphen.

§. 252a.

Zusatz. Jedem Kreise kann durch geometrische Construction ein regelmäßiges Fünfeck, Zehneck, Zwanzigeck &c. sowohl eingeschrieben als umschrieben werden.

Das eingeschriebene regelmäßige Fünfeck entsteht aus dem Zehneck, indem man in dem letzteren einen um den andern Eckpunkt wegläßt und die übrigbleibenden Eckpunkte durch Seiten verbindet. Die übrigen regelmäßigen Polygone ergeben sich auf dieselbe Weise wie im §. 193.

Anmerkung 1. Wenn die Aufgabe vorgelegt wäre: Über einer gegebenen Seite *AB* ein regelmäßiges Zehneck zu construiren, so würde man nach dem in der Anmerkung 1 zu §. 250 angezeigten Verfahren den Halbmesser *MA*, und daraus den Mittelpunkt *M* des umschriebenen Kreises zu suchen haben.

Wenn ferner über einer gegebenen Seite *AB* ein regelmäßiges Fünfeck zu construiren ist, so bilde man ebenso das Dreieck *MAB*, und nehme den Punkt *M* als dritten Eckpunkt des Fünfecks, zu welchem der vierte und fünfte sodann leicht in dem dem Dreiecke

MAB umschriebenen Kreise gefunden werden können. Denn da hier $\angle AMB = 36^o$ Peripheriewinkel wird, so ist *AB* Sehne eines Centriwinkels von 72°, mithin Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks.

Wird in dem so gefundenen regelmäßigen Fünfecke ein Eckpunkt weggelassen, so hat man wieder das gleichschenkelige Trapez §. 250a. Das Dreieck *MAB*, Fig. 168, ist identisch mit dem Dreiecke *ABC*, Fig. 167a und kann, an und für sich betrachtet, als Auflösung der Aufgabe angesehen werden: Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als der Winkel an der Spitze ist.

Anmerkung 2. Wenn man aus einem Punkte einer gegebenen Kreis-Peripherie sowohl die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks als auch die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks als Sehnen abträgt und die Endpunkte beider durch eine neue Sehne verbindet, so ist diese die Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Fünfzehnecks. Denn es ist $^1/_6 - ^1/_{10} = ^1/_{15}$. Man hat also damit auch die Hülfsmittel, um einem jeden gegebenen Kreise ein regelmäßiges Fünfzehneck, also auch ein regelmäßiges Dreißigeck, Sechzigeck 2c. sowohl einzuschreiben als auch zu umschreiben.

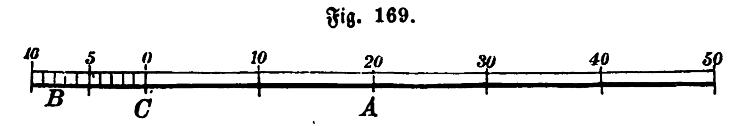
Der verjüngte Maßstab.

§. 253.

Aufgabe. Einen verjüngten Maßstab zu zeichnen.

Auflösung. Ein verjüngter Maßstab, welcher auf dem Zeichenpapiere zum Messen von Längen gebraucht wird, hat im einfachsten Falle die folgende Gestalt.

Fig. 169.



Als Längen-Einheit wird hier gewöhnlich eine Ruthe (^{o}) oder ein Meter (^{m}), seltener ein Fuß (′) oder ein Zoll (″) verstanden.

Will man auf diesem Maßstabe z. B. eine Länge von 27° in den Zirkel fassen, so stelle man die eine Zirkelspitze in 20 (*A*) und

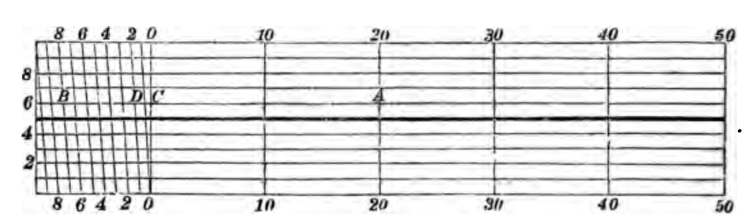
die andere in 7 (B). Alsdann ist $AC = 20°$ und $CB = 7°$, folglich die zwischen den beiden Zirkelspitzen enthaltene Länge $AB = 27°$.

Dieser verjüngte Maßstab genügt in der Regel nicht, weil er keine Unterabtheilungen der Einheit enthält. Man hat deshalb die beiden folgenden Einrichtungen ausgedacht, welche Unterabtheilungen der Einheit liefern, ohne diese Einheit selbst unmittelbar in gleiche Theile zu zerlegen.

1) Der Transversal-Maßstab.

Dieser Maßstab zerlegt jede Ruthe in 10 gleiche Theile oder Fuß (Decimalfuß). Seine Einrichtung ist aus Fig. 170 leicht zu erkennen. Zu der einfachen Linie, welche in Fig. 169 dargestellt ist, sind hier 10 Parallelen in unter sich gleichen, übrigens beliebig großen Abständen gezogen worden; diese Parallelen werden von den Perpendikeln 0 — 0, 10 — 10, 20 — 20 2c. und außerdem von den Transversalen 0 — 1, 1 — 2, 2 — 3 2c. durchschnitten.

Fig. 170.



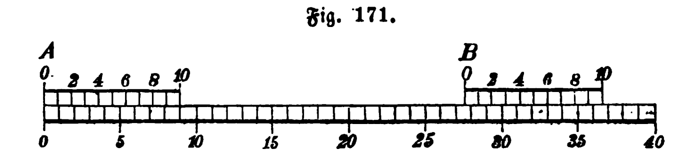
Will man auf diesem Maßstabe z. B. eine Länge von 27° 6′ in den Zirkel fassen, so stelle man in der 6ten Parallele die eine Zirkelspitze in das Perpendikel 20 — 20 (A) und die andere in die Transversale 7 — 8 (B). Alsdann ist $AC = 20°$, $DB = 7°$ und $CD = 6'$, (nach §. 210), folglich die zwischen den beiden Zirkelspitzen enthaltene Länge $AB = 27°\ 6'$.

Um das erhaltene Maß und zugleich die Güte des Maßstabes zu prüfen, bemerke man sich auf dem Maßstabe das Doppelte der gesuchten Länge, d. i. 55° 2′, worauf die gefundene Zirkelöffnung genau zweimal muß abgetragen werden können.

2) Der Nonius oder Vernier.

Dieser Maßstab zerlegt gleichfalls jede Ruthe in 10 gleiche Theile oder Fuß. Zu dem Ende hat man eine Länge von 9 Einheiten des Maßstabes in 10 gleiche Theile getheilt, und diese 10 Theile auf einem Schieber abgetragen, welcher längs dem Maßstabe beliebig verschoben werden kann. Dieser Schieber ist in Fig. 171 zweimal gezeichnet, in *A* und *B*. Jeder Theil des Schiebers enthält $\frac{9}{10}$ Einheiten des Maßstabes.

Fig. 171.



Will man auf diesem Maßstabe z. B. eine Länge von 27° 6′ fassen, so bringe man den Nonius (d. h. den Schieber) von *A* nach *B* in eine solche Lage, daß der Punkt 0 des Nonius zwischen 27 und 28 des Maßstabes, und zugleich der Theilstrich 6 des Nonius mit einem Theilstrich (hier 33) des Maßstabes zusammenfällt. Alsdann ist $AB = 27^{\circ}\ 6'$.

Anmerkung. Der Transversal=Maßstab ist seit dem berühmten Astronomen Tycho de Brahe im Gebrauch, welcher ihn im Jahre 1573 zu Leipzig, wo er studirte, von seinem Lehrer kennen lernte. Der Erfinder ist nicht bekannt; in Frankreich nennt man als solchen den Mathematiker Desargues, der jedoch später lebte.

Der Nonius rührt in seiner ersten Idee von Nuñez, lat. Nonius her, welcher 1577 als Professor zu Coimbra starb und durch mathematische und astronomische Schriften sich einen Namen gemacht hat. Seine heutige Einrichtung mit dem beweglichen Schieber verdankt man aber einer kleinen Schrift des sonst nicht weiter bekannten Vernier, welche 1631 zu Brüssel erschien.

Der Nonius wird vorzugsweise zu den Kreistheilungen der Winkel=Instrumente gebraucht, wo der Transversal=Maßstab nicht anwendbar ist.

Achter Abschnitt.

Inhaltsberechnung der Figuren.

§. 254.

Erklärung. Eine Fläche *messen* heißt: Die Anzahl von Einheiten und Theilen der Einheit angeben, welche gesetzt werden muß, um eine der ersten gleiche Fläche hervorzubringen.

Als Einheit der Flächenmessung wird ein Quadrat angenommen, dessen Seite gleich der gegebenen Längen-Einheit ist.

So mißt man die Flächen mit Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratmeter 2c., wo die Längen mit Ruthe, Fuß, Meter 2c. gemessen werden. Jede dieser Flächen-Einheiten ist ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe, einen Fuß oder ein Meter beträgt.

Man schreibt Quadratruthe □°, Quadratfuß □′, Quadratmeter □m,

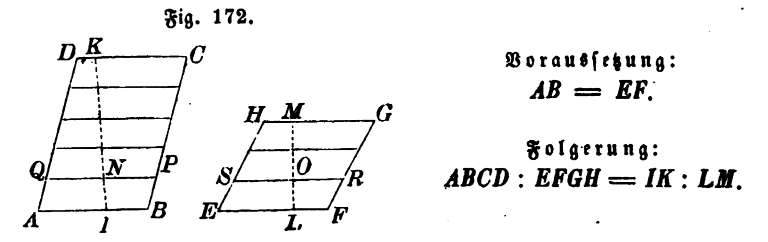
Die Messung einer Fläche hat man sich immer so zu denken, daß die gegebene Flächen-Einheit auf der zu messenden Fläche abgetragen wird, so oft es angeht, und das Resultat dieses Abtragens durch eine Zahl ausgedrückt wird. Diese unmittelbare Messung ist aber fast niemals ausführbar; vielmehr ist der Zweck der hier folgenden Sätze dahin gerichtet, den Inhalt einer zu messenden Fläche *durch Rechnung* aus gemessenen Linien abzuleiten. Die Messung von Linien bildet demnach jederzeit die Voraussetzung zu der Inhaltsberechnung einer Figur.

Verhältnisse unter Flächen.

§. 255.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Fig. 172.



Voraussetzung:
$AB = EF.$

Folgerung:
$ABCD : EFGH = IK : LM.$

Beweis. Um das Verhältniß $IK : LM$ der beiden Höhen darzustellen, muß man nach §. 200 diese beiden Höhen durch einerlei Maß messen. Es seien nun 1) die Höhen IK und LM commensurabel. Alsdann läßt sich nach §. 199 ein gemeinschaftliches Maß angeben, welches auf IK und LM genau abgetragen werden kann. Ist z. B. $IN = LO$ dieses gemeinschaftliche Maß, und ist dasselbe n mal in IK (in der Figur 5 mal) und r mal in LM (in der Figur 3 mal) enthalten, so hat man nach §. 200

$$IK : LM = n : r. \qquad (1.)$$

Zieht man ferner durch alle Theilpunkte der Höhen IK und LM Parallelen zu den Grundlinien AB und EF der Parallelogramme, so wird jedes dieser Parallelogramme in eben so viele kleinere Parallelogramme zerlegt, wie seine Höhe Theile enthält. Ueberdies sind, nach §. 115, nicht nur die so entstandenen Theile eines jeden Parallelogramms unter sich, sondern auch jeder Theil des einen mit jedem Theil des andern Parallelogramms, gleich groß. Man kann mithin das Parallelogramm $ABPQ = EFRS$ wie ein gemeinschaftliches Maß der beiden Parallelogramme $ABCD$ und $EFGH$ ansehen, welches n mal in $ABCD$ und r mal in $EFGH$ enthalten ist. Also hat man, mit Anwendung des §. 200 auf Flächen,

$$ABCD : EFGH = n : r. \qquad (2.)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) endlich folgt

$$ABCD : EFGH = IK : LM,$$

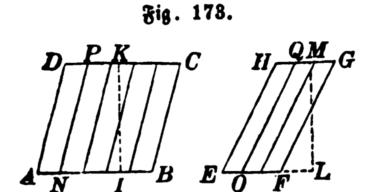
w. z. b. w.

Es seien 2) die Höhen IK und LM incommensurabel. Alsdann wird jedes Maß von IK, welches man angeben mag, nicht genau auf LM abgetragen werden können, sondern es wird hier ein Rest bleiben, welcher kleiner als das angenommene Maß ist. Wenn man diesen Rest nicht berücksichtigt, so gelten wieder die vorigen Schlüsse. Da man es aber in seiner Gewalt hat, das willkürliche Maß und folglich auch diesen Rest so klein werden zu lassen, wie man will, so gilt hier wieder vollkommen genau die vorige Proportion.

§. 256.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Fig. 173.



Voraussetzung:
$IK = LM$.

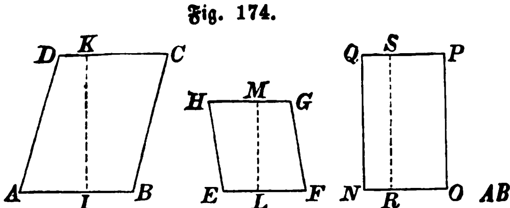
Folgerung:
$ABCD : EFGH = AB : EF$.

Der Beweis kann, nach Anleitung der Figur, ganz nach dem Vorbilde des vorigen Beweises geführt werden.

§. 257.

Lehrsatz. Die Flächen jeder zwei Parallelogramme verhalten sich zu einander wie die Producte der Zahlen, welche die Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen ausdrücken.

Fig. 174.



Voraussetzung:
$AB : EF = g : g'$
$IK : LM = h : h'$

Folgerung:
$ABCD : EFGH = gh : g'h'$.

Beweis. Man construire ein drittes Parallelogramm, $NOPQ$, dessen Grundlinie $NO = EF$ und dessen Höhe $RS = IK$ ist. Alsdann hat man nach den beiden vorhergehenden Lehrsätzen

$$ABCD : NOPQ = AB : NO$$
$$NOPQ : EFGH = RS : LM,$$

mithin auch

$$ABCD : NOPQ = g : g'$$
$$NOPQ : EFGH = h : h'$$

und wenn man hierauf den Satz §. 150 4) der Arithmetik anwendet, so folgt

$$ABCD : EFGH = gh : g'h',$$

w. z. b. w.

Beispiel. Wenn die Grundlinien zweier Parallelogramme in dem Verhältniß 2 : 7 und die Höhen derselben in dem Verhältniß 3 : 4 stehen, so verhalten sich ihre Flächen wie 6 : 28, d. i. wie 3 : 14, oder das zweite Parallelogramm ist das $4\frac{2}{3}$fache des ersten.

Aus diesem Satze können die Lehrsätze §. 215 und 216 neu bewiesen werden.

§. 258.

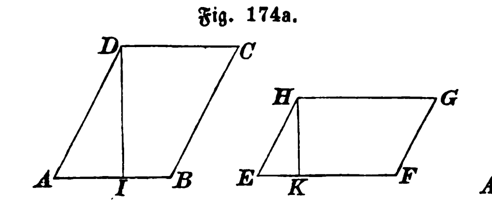
Zusatz. Die Flächen jeder zwei Dreiecke verhalten sich zu einander wie die Producte der Zahlen, welche die Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen ausdrücken.

Denn Dreiecke können immer wie die Hälften von Parallelogrammen angesehen werden, welche mit ihnen gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

§. 258a.

Lehrsatz. Die Flächen jeder zwei Parallelogramme oder Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte der Zahlen, welche die Verhältnisse der diesen Winkel einschließenden Seiten ausdrücken.

Fig. 174a.



Voraussetzung:

$\angle BAD = \angle FEH$

$AB : EF = a : a'$

$AD : EH = b : b'$.

Folgerung:

$ABCD : EFGH = ab : a'b'$.

Beweis. Man fälle die Perpendikel DI und HK. Dann hat man

$$\triangle ADI \sim \triangle EHK \text{ nach §. 220}$$

und daraus

$$AD : EH = ID : KH,$$

mithin, in Folge der Voraussetzung

$$ID : KH = b : b'.$$

Da hiermit die Voraussetzungen des §. 257 erfüllt sind, so folgt

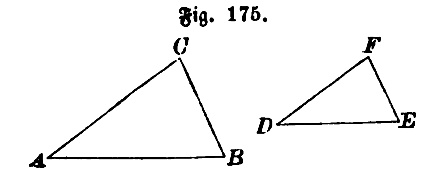
$$ABCD : EFGH = ab : a'b',$$

w. z. b. w.

Der hier für Parallelogramme geführte Beweis kann unmittelbar auf Dreiecke übertragen werden.

§. 259.

Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Dreiecke oder Polygone verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten ausdrücken.



Voraussetzung:
$ABC \backsim DEF,$
$AB : DE = m : m'.$

Folgerung:
$ABC : DEF = m^2 : m'^2.$

Beweis. 1) Die gegebenen ähnlichen Figuren seien Dreiecke, *ABC* und *DEF*, Fig. 175. Vermöge der Ähnlichkeit dieser Dreiecke ist

$$\angle BAC = \angle EDF$$
$$AB : DE = AC : DF,$$

also auch, in Folge der Voraussetzung,

$$AC : DF = m : m'.$$

Da hiermit alle Voraussetzungen des vorigen Paragraphen erfüllt sind, so folgt

$$ABC : DEF = m^2 : m'^2,$$

w. z. b. w.

2) Wenn die gegebenen ähnlichen Figuren Polygone von beliebiger Seitenzahl sind, so kann man dieselben nach §. 225 durch übereinstimmend gezogene Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegen und auf jedes Paar dieser ähnlichen Dreiecke den vorigen Schluß anwenden, welcher demnach auch für ihre Summen, d. i. die Polygone, gültig ist, w. z. b. w.

Beispiel. Gesetzt, man habe irgend eine Fläche, z. B. den Grundriß einer Stadt oder eines Landes nach verjüngtem Maßstabe gezeichnet, so daß 50 Meter dieses Maßstabes die Länge von 1 Centimeter einnehmen. Alsdann verhalten sich jede zwei gleichliegende Seiten der gezeichneten Fläche und der wirklichen Fläche zu einander wie $1^{cm} : 50^{m}$ oder wie 1 : 5000, folglich verhalten sich nach dem vorstehenden Satze die Inhalte der gezeichneten und der wirklichen Fläche zu einander wie 1 : 25000000 oder man

muß die Zeichnung 25000000mal an einander legen, um eine der wirklichen Fläche inhaltsgleiche Figur hervorzubringen.

Anmerkung. Da alle Quadrate ähnliche Figuren sind, so verhalten sich nach diesem Satze auch die Flächen je zweier Quadrate zu einander wie die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten ausdrücken. Folglich kann man statt des vorstehenden Lehrsatzes auch sagen:

Die Flächen ähnlicher Dreiecke oder Polygone verhalten sich zu einander wie die Flächen der Quadrate, welche über gleichliegenden Seiten derselben construirt werden können.

§. 260.

Zusatz. Gleichliegende Seiten ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander wie die Quadratwurzeln aus den Zahlen, welche das Verhältniß der Flächen dieser Figuren ausdrücken.

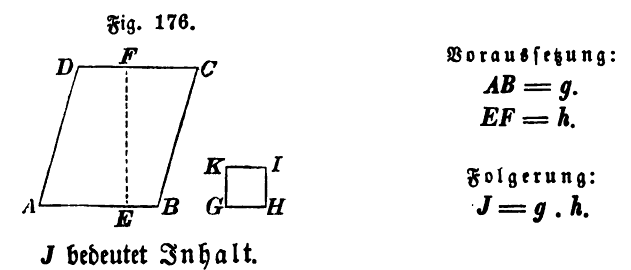
Will man z. B. ein Polygon zeichnen, welches einem gegebenen ähnlich und noch einmal so groß als dasselbe ist, so müssen sich die gleichliegenden Seiten beider wie $1 : \sqrt{2}$ verhalten. Die gesuchten Seiten kann man nach §. 247 (vgl. Arithm. §. 191 Anm.) durch Construction finden.

Inhaltsberechnung der geradlinigen Figuren.

§. 261.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Parallelogramms wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben, in Zahlen ausgedrückt, mit einander multiplicirt.

Fig. 176.



Voraussetzung:
$AB = g.$
$EF = h.$

Folgerung:
$J = g \cdot h.$

J bedeutet Inhalt.

Beweis. Es sei *GHIK* dasjenige Quadrat, welches als Flächen-Einheit angesehen wird. Alsdann ist die Seite *GH* dieses Quadrats diejenige Längen-Einheit, mit welcher gemessen die Grundlinie *AB* die Zahl g und die Höhe *EF* die Zahl h liefert. Es ist also

$$AB : GH = g : 1$$
$$EF : GK = h : 1,$$

folglich nach §. 257

$$ABCD : GHIK = gh : 1,$$
$$\text{d. i. } ABCD = gh \,.\, GHIK,$$
$$\text{oder } J = gh,$$

w. z. b. w.

Beispiel. Ein Parallelogramm habe 17′ Grundlinie und 9′ Höhe. Alsdann ist sein Inhalt = 153 □′.

Anmerkung. Man beweist diesen Satz häufig viel anschaulicher, wenn auch weniger streng, auf folgende Weise.

Man denke sich für das hier gegebene Parallelogramm ein Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe an die Stelle gesetzt, welches nach §. 115 denselben Inhalt hat. In diesem Rechteck *ABCD*, Fig. 177, kann man die gegebene Flächen-Einheit *GHIK* zunächst längs der Grundlinie *AB* so viel mal abtragen, wie die Längen-Einheit in dieser Grundlinie enthalten ist, d. i. g mal (in der Figur 5 mal). Die so erhaltene Quadraten-Reihe *ABEF* kann man ferner in dem Rechtecke *ABCD* so viel mal über einander abtragen, wie die Längen-Einheit in der Höhe des Rechtecks enthalten ist, d. h. h mal (in der Figur 4 mal). Folglich enthält das Rechteck *ABCD* die Flächen-Einheit *GHIK* so viel mal in sich, wie das Product gh anzeigt; oder es ist $J = gh$, w. z. b. w.

Fig. 177.

§. 262.

Zusatz. Der Inhalt eines Quadrats ist gleich dem Quadrat oder der zweiten Potenz seiner Seite.

Oder wenn a die Seitenlänge eines Quadrats, durch eine Zahl ausgedrückt, bedeutet, so ist

$$J = a^2.$$

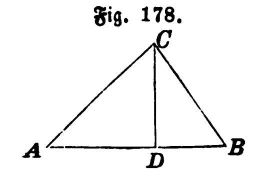
Daher schreibt sich der gemeinschaftliche Gebrauch des Worts Quadrat in der Arithmetik und der Geometrie.

Man kann hieraus ferner schließen: Wenn wie bei dem Decimalmaß $1^\circ = 10'$ und $1' = 10''$ ist, so muß $1\,\square^\circ = 100\,\square'$ und $1\,\square' = 100\,\square''$ sein. Ebenso, wenn wie bei dem hannoverschen Werkmaß $1^\circ = 16'$ und $1' = 12''$ ist, so muß $1\,\square^\circ = 256\,\square'$ und $1\,\square' = 144\,\square''$ sein. Endlich wenn $1^m = 100^{cm}$ ist, so ist $1\,\square^m = 10000\,\square^{cm}$.

§. 263.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe desselben mit einander multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.

Fig. 178.



Voraussetzung:
$AB = g$
$CD = h.$

Folgerung:
$J = \frac{gh}{2}.$

Beweis. Ein Parallelogramm von der Grundlinie g und der Höhe h hat nach §. 261 den Inhalt gh.

Das Dreieck ist aber die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und Höhe, folglich hat das gegebene Dreieck den Inhalt

$$J = \frac{gh}{2},$$

w. z. b. w.

Beispiel. Die Grundlinie eines Dreiecks betrage $94^\circ\,7'\,2''$ und die Höhe $36^\circ\,3'\,9''$ Decimalmaß. Multiplicirt man $94{,}72 \,.\, 36{,}39$ und dividirt das Product durch 2, so erhält man 1723,4304. Folglich ist der gesuchte Inhalt des Dreiecks $= 1723\,\square^\circ\;43\,\square'\;04\,\square''$.

Anmerkung 1. Die obige Gleichung kann man auch schreiben

$$J = g \cdot \frac{h}{2} \text{ oder } J = \frac{g}{2} \cdot h,$$

d. h. der Inhalt des Dreiecks wird auch gefunden, indem man die Grundlinie mit der Hälfte der Höhe, oder indem man die Hälfte der Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

Anmerkung 2. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks in Zahlen gegeben sind, so kann man daraus, indem man eine derselben wie Grundlinie ansieht, die Höhe und folglich auch den Inhalt berechnen wie folgt:

1) Das Dreieck sei gleichseitig und jede Seite desselben $= a$. Nimmt man eine beliebige Seite als Grundlinie und nennt x die zugehörige Höhe, so hat man aus dem Obigen

$$J = \frac{ax}{2}.$$

Nun ist x Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete $= \frac{a}{2}$ und dessen Hypotenuse $= a$ ist. Folglich giebt der Lehrsatz des Pythagoras (mit Rücksicht auf §. 262)

$$x^2 + \frac{a^2}{4} = a^2,$$

woraus

$$x^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Setzt man diesen Werth in den vorigen Ausdruck für J, so wird schließlich

$$J = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad (1.)$$

Es sei z. B. $a = 10'$. Dann wird der Inhalt $J = 43{,}30 \,\square'$.

2) Das Dreieck sei gleichschenkelig, die Grundlinie desselben $= a$ und jeder der gleichen Schenkel $= b$. Nennt man x die Höhe des Dreiecks, so hat man wie vorhin

$$J = \frac{ax}{2}.$$

Nun ist x Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen andere Kathete $= \frac{a}{2}$ und dessen Hypotenuse $= b$ ist. Folglich giebt der Lehrsatz des Pythagoras

$$x^2 + \frac{a^2}{4} = b^2,$$

woraus

$$x^2 = \frac{4\,b^2 - a^2}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{4\,b^2 - a^2}}{2}.$$

Setzt man diesen Werth in den vorigen Ausdruck für J, so wird schließlich

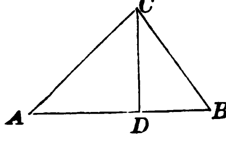
$$J = \frac{a\sqrt{4\,b^2 - a^2}}{4} \qquad (2.)$$

oder für die Rechnung bequemer

$$J = \frac{a\sqrt{(2\,b + a)\,(2\,b - a)}}{4} \qquad (3.)$$

Es sei z. B. $a = 10'$ und $b = 12'$. Dann wird $2\,b + a = 34'$, $2\,b - a = 14'$, und daraus $J = 54{,}54\ \square'$.

3) Das Dreieck sei ungleichseitig, Fig. 178, und die Seiten desselben $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$. Nimmt man $AB = a$ als Grundlinie an und setzt die zugehörige Höhe $CD = x$, so hat man wie oben



$$J = \frac{ax}{2}.$$

Setzt man ferner $AD = y$, folglich $BD = a - y$, so wird im rechtwinkeligen Dreiecke ADC

$$x^2 + y^2 = b^2 \qquad (\alpha)$$

und im rechtwinkeligen Dreiecke BDC

$$x^2 + (a - y)^2 = c^2,$$

d. i.

$$x^2 + a^2 - 2ay + y^2 = c^2. \qquad (\beta)$$

Die Elimination von x aus diesen beiden Gleichungen (α) und (β) durch Subtraction der unteren Gleichung von der oberen, giebt die neue Gleichung

$$2ay - a^2 = b^2 - c^2,$$

woraus

$$y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (α), so erhält man

$$x^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = b^2$$

aus welcher Gleichung die Unbekannte x durch folgende Rechnung gefunden wird:

$$x^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{2\,ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{2\,ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{c^2 - (a - b)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a + b + c)\,(a + b - c)\,(c + a - b)\,(c - a + b)}{4a^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{(a + b + c)\,(a + b - c)\,(c + a - b)\,(c - a + b)}}{2a}.$$

Setzt man diesen Werth in den obigen Ausdruck für J, so wird schließlich

$$J = \frac{\sqrt{(a + b + c)\,(a + b - c)\,(c + a - b)\,(c - a + b)}}{4}. \qquad (4.)$$

Dieser Ausdruck läßt noch eine bequemere Gestalt zu, wenn man darin die halbe Summe der drei Seiten mit einem einfachen Buchstaben einführt, nämlich

$$\frac{a + b + c}{2} = s. \qquad (5.)$$

Denn diese Gleichung giebt

$$a + b + c = 2\,s$$

und wenn man hiervon die identischen Gleichungen $2\,c = 2\,c$, $2\,b = 2\,b$, $2\,a = 2\,a$ subtrahirt, so kommt

$$a + b - c = 2\,(s - c)$$
$$a + c - b = 2\,(s - b)$$
$$b + c - a = 2\,(s - a)$$

Die Einführung dieser vier Werthe in die Gleichung (4) giebt endlich

$$J = \frac{\sqrt{2s \,.\, 2(s-a) \,.\, 2(s-b) \,.\, 2(s-c)}}{4},$$

d. i. vereinfacht

$$J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (6.)$$

Die in dieser Formel enthaltene bemerkenswerthe Regel für die Inhaltsberechnung eines Dreiecks aus seinen drei Seiten ist schon den Indern und Griechen bekannt gewesen. Die Formel eignet sich besonders zur logarithmischen Rechnung.

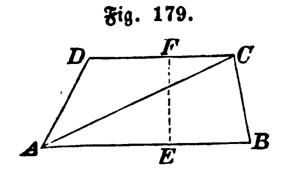
Es sei z. B. $a = 10'$, $b = 12'$, $c = 16'$. Dann wird $s = 19'$ und daraus $J = 59{,}93\,\square'$.

Wenn man in (6) $a = b = c$ oder nur $b = c$ setzt, so entstehen wieder die Formeln (1) und (2).

§. 264.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Trapez wird gefunden, wenn man die Summe der beiden parallelen Seiten mit der Höhe multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.

Fig. 179.



Voraussetzung:

$AB = a$
$CD = b$
$EF = h.$

Folgerung:

$$J = \frac{(a+b) \,.\, h}{2}.$$

Beweis. Man ziehe eine Diagonale AC. Nach dem vorigen Paragraph ist

$$ABC = \frac{ah}{2}$$

$$ADC = \frac{bh}{2}$$

und aus der Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$J = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2}$$

oder einfacher

$$J = \frac{(a+b) \,.\, h}{2}$$

w. z. b. w.

Beispiel. Es sei $a = 46° \, 9'$, $b = 31° \, 5'$, $h = 14° \, 4'$. Der Inhalt wird $= 564 \, \square° \; 49 \, \square'$.

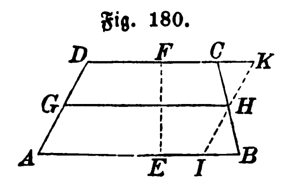
Anmerkung 1. Die obige Gleichung kann man auch schreiben

$$J = (a + b) \cdot \frac{h}{2} \text{ oder } J = \frac{a + b}{2} \cdot h,$$

d. h. der Inhalt des Trapez wird auch gefunden, indem man die Summe der beiden parallelen Seiten mit der Hälfte der Höhe, oder indem man die halbe Summe („das arithmetische Mittel") der beiden parallelen Seiten mit der Höhe multiplicirt.

Anmerkung 2. Wenn man unter der Mittellinie des Trapez eine Linie $GH = m$ versteht, welche die Mitten G und H der nicht parallelen Seiten mit einander verbindet, so kann man auch sagen: Der Inhalt des Trapez wird gefunden, wenn man die Mittellinie mit der Höhe multiplicirt; oder

Fig. 180.



$$J = m \cdot h.$$

Um dies zu beweisen, verwandele man das Trapez $ABCD$ in das Parallelogramm $AIKD$ (§. 122). Dann ist

$$m = a - IB$$
$$m = b + CK,$$

woraus wegen $IB = CK$ folgt

$$2m = a + b$$
$$m = \frac{a + b}{2},$$

d. h. die Mittellinie des Trapez ist gleich dem arithmetischen Mittel der beiden parallelen Seiten.

Setzt man $a = b$, so geht das Trapez in ein Parallelogramm über und es wird $m = a$. Setzt man $b = 0$, so geht das Trapez in ein Dreieck über und es wird $m = \frac{a}{2}$. Die Formel $J = m \cdot h$ gilt demnach gleichmäßig für die Inhaltsberechnung von Parallelogrammen, Dreiecken und Trapezen.

Anmerkung 3. Der Inhalt eines Trapez kann auch aus den vier Seiten desselben gefunden werden, nämlich den beiden parallelen Seiten $AB = a$ und $CD = b$ und den beiden nicht parallelen Seiten $AD = c$ und $BC = d$. Es ist nämlich

$$J = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{\sqrt{(b+c+d-a)\,(a+c+d-b)\,(a+c-b-d)\,(a+d-b-c)}}{4}.$$

Zum Beweise zerlege man das Trapez in ein Parallelogramm und ein Dreieck, und bestimme den Inhalt des letzten nach §. 263 Anm. 2.

Es sei z. B. $a = 43^\circ\ 1'$, $b = 32^\circ\ 4'$, $c = 13^\circ\ 7'$, $d = 12^\circ\ 2'$. Dann wird $J = 440\ \square^\circ\ 80\ \square'$.

§. 265.

Lehrsatz. Ein regelmäßiges Polygon ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Umfang des Polygons und dessen Höhe der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ist.

Oder: Der Inhalt eines regelmäßigen Polygons wird gefunden, wenn man den Umfang desselben mit dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises multiplicirt und das Product durch 2 dividirt.

Fig. 181.

Voraussetzung:

$$AB + BC + CD + DE + EA = u$$
$$MF = r.$$

Folgerung:

$$J = \frac{u \,.\, r}{2}.$$

Beweis. Man ziehe aus dem Mittelpunkte M des eingeschriebenen Kreises Linien nach allen Eckpunkten A, B, C ꝛc. des Polygons und wende auf jedes der dadurch entstehenden Dreiecke MAB, MBC ꝛc., den Lehrsatz §. 263 an. So erhält man

$$MAB = \frac{AB \,.\, r}{2}$$
$$MBC = \frac{BC \,.\, r}{2}$$
$$MCD = \frac{CD \,.\, r}{2}$$
$$MDE = \frac{DE \,.\, r}{2}$$
$$MEA = \frac{EA \,.\, r}{2}$$

und wenn man alle diese Gleichungen addirt, so folgt

$$J = \frac{(AB + BC + CD + DE + EA) \,.\, r}{2},$$

d. i. $J = \frac{u \,.\, r}{2}$

oder der Inhalt J ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, welches u zur Grundlinie und r zu Höhe hat, w. z. b. w.

Beispiel 1. Man construire nach einem verjüngten Maßstabe ein regelmäßiges Zehneck, dessen Seite = 12° 7′ lang ist, messe den Halbmesser seines eingeschriebenen Kreises, und berechne den Inhalt.

Antw. $J = 1241\ \square^{0}$.

Beispiel 2. Man construire ein regelmäßiges Achteck, in welchem der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = 29° 4′ lang ist, messe seine Seite und berechne den Inhalt.

Antw. $J = 2864\ \square^{0}\ 24'$.

Anmerkung. Von denjenigen regelmäßigen Polygonen, welche sich im Kreise construiren lassen (§§. 193, 195, 252a), kann der Inhalt aus der alleinigen Kenntniß der Seite = a berechnet werden. Die einfachsten Fälle, nächst dem Quadrat und dem gleichseitigen Dreiecke sind die folgenden:

Das regelmäßige Sechseck besteht aus 6 congruenten gleichseitigen Dreiecken. Mithin ist sein Inhalt

$$J = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}.$$

Das regelmäßige Achteck hat einen Umfang von = $8a$, und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ist gleich der halben Seite des Quadrats, welches durch hinreichende Verlängerung von 4 Seiten des Achtecks gebildet werden kann, also = $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{2})$. Mithin ist sein Inhalt

$$J = 2a^2\ (1 + \sqrt{2}).$$

Das regelmäßige Zehneck besteht aus 10 congruenten gleichschenkeligen Dreiecken, deren Grundlinien = a und deren Schenkel = $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$ sind (§. 250 Anm. 2). Mithin wird mit Anwendung von §. 263 Gleichung (2) sein Inhalt

$$J = \frac{5}{2} a^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

§. 266.

Aufgabe. Den Inhalt eines beliebigen unregelmäßigen Polygons zu berechnen.

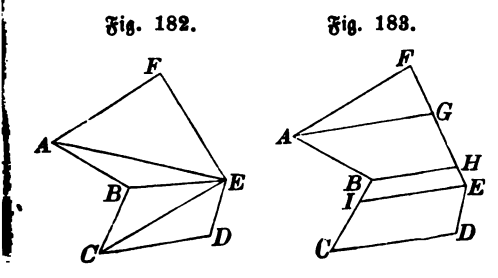


Fig. 182. Fig. 183.

Gegeben:
Polygon *ABCDEF*.

Gesucht.
Der Inhalt.

Erste Methode. Man zerlege das gegebene Polygon, Figur 182, entweder durch Diagonalen *AE, BE, CE* (wie in der Figur), oder auch durch Linien, welche aus einem Punkte im Innern des Polygons nach allen Eckpunkten gezogen werden, in Dreiecke, und berechne die Inhalte dieser Dreiecke nach §. 263.

Zweite Methode. Man zerlege das gegebene Polygon, Figur 183, durch Parallelen *AG, BH, EI* (welcher hier parallel der Seite *CD* gelegt sind) in Trapeze und Dreiecke und berechne deren Inhalte nach §§. 263 und 264.

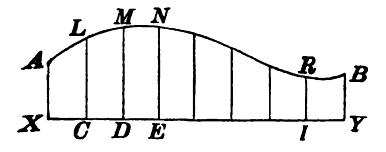
Beispiel. Es sei gegeben $AB = 16^\circ\, 4'$, $BC = 15^\circ\, 9'$, $CD = 23^\circ\, 3'$, $DE = 10^\circ\, 7'$, $EF = 30^\circ\, 0'$, $FA = 24^\circ\, 7'$, $AE = 31^\circ\, 6'$, $BE = 17^\circ\, 8'$, $CE = 28^\circ\, 5'$. Man construire aus diesen Angaben nach einem verjüngten Maßstabe das Polygon, und berechne seinen Inhalt sowohl nach der ersten als auch nach der zweiten Methode.

Antw. $J = 697 \,\square^\circ\, 31 \,\square'$.

Anmerkung. Die zweite Methode dieses Paragraphen kann auch angewandt werden, um angenähert den Inhalt einer Fläche zu berechnen, welche durch eine krumme Linie begrenzt wird.

Es sei *AB*, Fig. 183a, eine krumme Linie, welche eine Fläche begrenzt. Auf einer willkürlichen geraden Linie *XY*, der Abscissenlinie, habe man die Abscissen *XC, XD, XE* 2c. angenommen und dazu die rechtwinkeligen Ordinaten

Fig. 183a.



XA, CL, DM, EN 2c. construirt. Die Abstände dieser Ordinaten von einander seien gleich groß, d. h. $XC = CD = DE$ 2c., jedoch

so klein genommen, daß die zwischenliegenden Bogenstücke *AL*, *LM*, *MN* ꝛc., in Bezug auf den gesuchten Inhalt ohne merklichen Fehler wie geradlinig angesehen werden können. Alsdann erscheint die ganze Fläche *XYBA* wie eine Summe von Trapezen, deren Inhalt wie oben zu berechnen ist.

Setzt man

$$XC = CD = DE \ldots = a,$$

$$XA = b, CL = b', DM = b'', EN = b''', \ldots IR = b^{(n-1)}, YB = b^{(n)},$$

so wird demnach der gesuchte Inhalt

$$J = \frac{b+b'}{2}a + \frac{b'+b''}{2}a + \frac{b''+b'''}{2}a + \cdots \frac{b^{(n-1)}+b^{(n)}}{2}a$$

oder einfacher

$$J = \frac{a}{2}(b + 2b' + 2b'' + 2b''' + \cdots b^{(n)}) \qquad (1.)$$

oder auch

$$J = a\left(\frac{b+b^{(n)}}{2} + b' + b'' + b''' + \cdots b^{(n-1)}\right). \qquad (2.)$$

Z. B. man habe $a = 5^\circ$, und die Ordinaten $b, b', b'', \ldots$ seien der Reihe nach $7^\circ\,8'$, $8^\circ\,4'$, $8^\circ\,9'$, $8^\circ\,5'$, $7^\circ\,2'$, $6^\circ\,1'$, $5^\circ\,5'$, $5^\circ\,0'$, $5^\circ\,2'$. Alsdann wird $J = 280\,\square^\circ\;50\square'$.

Unter den Ordinaten können auch einige, insbesondere b und $b^{(n)}$, den Werth Null haben.

Eine noch genauere Formel für diesen Inhalt, welche auch auf die Krümmung der Bogenstücke *AL*, *LM*, *MN* ꝛc. Rücksicht nimmt, s. §. 281 Anm. 4.

Rectification des Kreises.

§. 267.

Erklärung. Unter der Rectification des Kreises versteht man die Berechnung der Länge der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gegeben ist.

Das Wort Rectification bedeutet ursprünglich die Verwandlung der Kreisperipherie in eine gerade Linie. Man kann sich von solcher Verwandlung ein deutliches Bild machen, wenn man sich die Peripherie

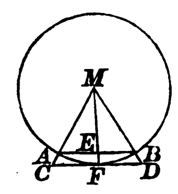
des Kreises durch einen biegsamen Faden dargestellt denkt und diesen darauf in eine gerade Linie ausspannt. Diese Verwandlung läßt sich indessen durch keine geometrische Construction genau ausführen, und man muß sich deshalb damit begnügen, die Länge einer gegebenen Kreisperipherie durch Rechnung zu finden.

Dahin führen die beiden folgenden Hülfs-Aufgaben.

§. 268.

Aufgabe. Aus der Seitenlänge eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons die Seitenlänge des demselben Kreise umschriebenen regelmäßigen Polygons von gleicher Seitenzahl zu finden.

Fig. 184.



Gegeben:

$AB = s$

$MA = MB = r.$

Gesucht:

$CD = S.$

Auflösung. Nach §. 210 ist

$$ME : MF = EB : FD$$

und daraus auch

$$ME : MF = AB : CD. \qquad (1.)$$

Setzt man in dieser Proportion statt der Linien die ihre Länge ausdrückenden Zahlen an die Stelle, so hat man zunächst nach der Voraussetzung $AB = s$ und $CD = S$. Ferner ist nach dem Lehrsatz des Pythagoras, in Zahlen ausgedrückt

$$ME^2 + EB^2 = MB^2,$$

d. i. $ME^2 + \frac{s^2}{4} = r^2$

und daraus $ME^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$

$$ME = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Endlich ist $MF = r$. Durch Substitution aller dieser Werthe verwandelt sich die Proportion (1) in folgende

$$\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} : r = s : S \qquad (2.)$$

und hieraus folgt nach §. 151 der Arithmetik

$$S = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

was zu suchen war.

Beispiel. Es sei s die Seite eines regelmäßigen Sechseck im Kreise, also $s = r$. Alsdann findet man, durch Substitution dieses Werthes von s in die vorige Formel, für die Seite des demselben Kreise umschriebenen regelmäßigen Sechsecks den Werth

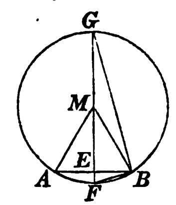
$$S = r \,.\, 1{,}154700.$$

So z. B. in einem Kreise von 1 Fuß Halbmesser ist die Seitenlänge des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks = 1 Fuß, und die Seitenlänge des umschriebenen regelmäßigen Sechsecks = 1,154700 Fuß.

§. 269.

Aufgabe. Aus der Seitenlänge eines einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons die Seitenlänge des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Polygons von doppelter Seitenzahl zu finden.

Fig. 185.



Gegeben:

$AB = s$

$MA = MB = r.$

Gesucht:

$FB = s'.$

Auflösung. Man verlängere FM bis G und ziehe BG. Alsdann ist nach dem Lehrsatz des Thales $\angle GBF = R$, folglich nach §. 244

$$FG : FB = FB : FE. \qquad (1.)$$

Setzt man in dieser Proportion für die Linien die ihre Länge ausdrückenden Zahlen, so hat man zunächst, in Folge der Voraussetzung, $FG = 2r$ und $FB = s'$. Ferner ist nach dem vorigen Paragraph

$$ME = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$$

und daraus

$$FE = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich die Proportion (1) in folgende

$$2r : s' = s' : \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right) \qquad (2.)$$

und hieraus folgt nach §. 153 der Arithmetik

$$s' = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

was zu suchen war.

Beispiel. Es sei s die Seite eines regelmäßigen Sechsecks im Kreise, also $s = r$. Alsdann findet man, durch Substitution dieses Werthes von s in die vorige Formel, für die Seite des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks den Werth

$$s' = r \,.\, 0{,}517638.$$

So z. B. in einem Kreise von 1 Fuß Halbmesser ist die Seitenlänge des eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks = 1 Fuß, und die Seitenlänge des eingeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks = 0,517638 Fuß.

§. 270.

Aufgabe. Die Länge der Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser gegeben ist, näherungsweise zu berechnen.

Auflösung. Man construire in dem gegebenen Kreise ein eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck, dessen Umfang aus §. 194 bekannt ist, und zugleich ein umschriebenes regelmäßiges Sechseck, dessen Umfang man nach §. 268 berechnen kann. Zwischen diesen beiden Umfängen wird die gesuchte Kreisperipherie enthalten sein.

Alsdann construire man in demselben Kreise ein eingeschriebenes regelmäßiges Zwölfeck, dessen Umfang man nach §. 269 findet, und zugleich ein umschriebenes regelmäßiges Zwölfeck, dessen Umfang man wieder nach §. 268 berechnen kann. Zwischen diesen beiden Umfängen wird wieder die gesuchte Kreisperipherie enthalten sein.

Ferner construire man ebenso ein eingeschriebenes und ein umschriebenes regelmäßiges 24eck, und berechne die Umfänge beider, welche gleichfalls die gesuchte Kreisperipherie zwischen sich enthalten.

Wenn man auf diese Weise fortfährt, sowohl eingeschriebene als auch umschriebene regelmäßige Polygone mit stets verdoppelter Seitenzahl zu construiren und die Umfänge derselben zu berechnen, so werden diese Umfänge beständig die gesuchte Kreisperipherie zwischen sich enthalten. Zugleich werden aber auch die Umfänge der beiden Polygone dieser Kreisperipherie fortwährend näher und näher kommen, so daß man es mithin durch hinreichende Fortsetzung dieses Verfahrens in seiner Gewalt hat, die Länge der gesuchten Kreisperipherie angenähert so genau zu bestimmen wie man will.

Das Verfahren wird von selbst seinen Abschluß finden, wenn die beiden Umfänge, welche die gesuchte Kreisperipherie zwischen sich enthalten, einander so nahe gerückt sind, daß die ihre Länge ausdrückenden Zahlen in so viel Decimalstellen, wie man bestimmen will, zusammenfallen. Denn alsdann hat man auch die Länge der gesuchten Kreisperipherie auf eben so viel Decimalstellen genau.

Die folgende Tabelle stellt eine solche Rechnung dar. Es bedeutet darin r den Halbmesser des gegebenen Kreises, und statt der Umfänge enthält sie nur die halben Umfänge der betreffenden Polygone.

Berechnung der halben Kreisperipherie für einen Halbmesser $= r$.

Anzahl der Seiten.	Halber Umfang des eingeschriebenen Polygons.	Halber Umfang des umschriebenen Polygons.
6	r . 3	r . 3,464101
12	r . 3,105828	r . 3,215390
24	r . 3,132628	r . 3,159660
48	r . 3,139350	r . 3,146086
96	r . 3,141031	r . 3,142714
192	r . 3,141451	r . 3,141874
384	r . 3,141566	r . 3,141647
768	r . 3,141592	r . 3,141593

Die beiden letzten Umfänge stimmen auf fünf Decimalstellen mit einander überein, folglich hat man auf fünf Decimalstellen genau für die Länge der halben Kreisperipherie den Werth

$$r \,.\, 3{,}14159 \ldots$$

Wollte man das Resultat auf sechs oder mehr Decimalstellen genau haben, so müßte man die Rechnung von Anfang an mit mehr Decimalstellen führen als hier geschehen ist.

Anmerkung. Der Erste, welcher diese Rechnung geführt hat, war Archimedes, der größte Mathematiker des Alterthums, welcher im Jahre 212 vor C. G. bei der Eroberung von Syracus durch die Römer umkam, nachdem er seine Vaterstadt mehrere Jahre hindurch durch Erbauung künstlicher Kriegsmaschinen gegen die Belagerer vertheidigt hatte. Archimedes führte die Mathematik um ein Bedeutendes über die Elemente des Euklides hinaus, wovon jedoch hier nichts weiter berichtet werden kann, weil seine Untersuchungen fast nur den höheren Theilen der Mathematik angehören. In der Stereometrie wird sein Name gleichfalls genannt werden.

Die obige Rechnung, von Archimedes geführt, muß man um so mehr bewundern, da dem Archimedes der Gebrauch unserer Ziffern und namentlich unserer Decimalbrüche gänzlich fehlte. Archimedes fand, indem er seine Rechnung mit dem 96eck abschloß, daß die Länge der Kreisperipherie zwischen dem $3\frac{1}{7}$- und $3\frac{10}{71}$fachen des Durchmessers enthalten sei, eine Bestimmung, deren Richtigkeit sich leicht aus den obigen Zahlen nachweisen läßt.

§. 271.

Erklärung. Unter der Zahl π versteht man denjenigen Factor, mit welchem man den Durchmesser eines Kreises multipliciren muß, um die Peripherie desselben zu finden.

Diese Zahl ist, wie man leicht erkennt, einerlei mit demjenigen Factor, mit welchem man den Halbmesser des Kreises multipliciren muß, um die halbe Kreisperipherie zu finden. Man hat also aus dem vorigen Paragraph auf fünf Decimalstellen genau

$$\pi = 3{,}14159 \ldots$$

Genauer fand Ludolf von Cöln im Jahre 1596

$$\pi = 3{,}1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846\ 2643\ 3832\ 7950 \ldots.$$

und nach ihm nennt man diese Zahl auch wohl die Ludolf'sche Zahl.

Gegenwärtig hat man die Zahl π durch die Hülfsmittel der höheren Mathematik auf 500 Decimalstellen berechnet, von denen jedoch niemals ein ernstlicher Gebrauch zu machen ist.

Für oberflächliche Rechnungen kann die Zahl des Archimedes $\pi = 3\frac{1}{7}$ schon ausreichend sein.

Der Logarithmus von π im Briggischen System ist

$$\log. \pi = 0{,}49715 \text{ auf fünf Decimalstellen.}$$
$$\log. \pi = 0{,}4971499 \text{ auf sieben Decimalstellen.}$$

Anmerkung. Die Zahl π ist eine irrationale Zahl, sie kann also weder durch einen geschlossenen noch durch einen periodischen Decimalbruch genau dargestellt werden. Dies hat zuerst Legendre bewiesen, der Beweis kann jedoch hier nicht gegeben werden.

§. 272.

Zusatz. Die Länge der Peripherie eines Kreises wird gefunden, wenn man den Durchmesser dieses Kreises mit der Zahl π multiplicirt.

Es bezeichne p die Peripherie eines Kreises und r den Halbmesser desselben. Alsdann ist $2r$ der Durchmesser dieses Kreises, folglich

$$p = 2r\pi.$$

Umgekehrt wird der Durchmesser eines Kreises gefunden, wenn man die Peripherie dieses Kreises durch die Zahl π dividirt. Oder

$$2r = \frac{p}{\pi}.$$

Beispiel 1. Der Zeiger einer Uhr hat 5 Zoll Länge. Wie lang ist der Weg, welchen die Spitze dieses Zeigers bei jeder Umdrehung zurücklegt?

Antw. 31,4 . . . Zoll.

Beispiel 2. Der Umfang des Erd-Äquators hält 5400 geographische Meilen. Wie lang ist der Durchmesser des Äquators?

Antw. 1718,874 oder sehr nahe $1718\frac{7}{8}$ Meilen.

Quadratur des Kreises.

§. 273.

Erklärung. Unter der Quadratur des Kreises versteht man die Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises, dessen Halbmesser gegeben ist.

Das Wort Quadratur bedeutet ursprünglich die Verwandlung der Kreisfläche in ein Quadrat. Diese Verwandlung hat sich aber durch keine geometrische Construction ausführen lassen, so oft auch von den Zeiten der Griechen bis auf die Gegenwart die Versuche zur Auffindung einer solchen Construction sich wiederholt haben. Man muß sich deshalb damit begnügen, den Inhalt einer gegebenen Kreisfläche durch Rechnung zu finden, woraus dann die Seite eines Quadrats, welches dem gegebenen Kreise inhaltsgleich ist, leicht gefolgert werden kann.

Der folgende Lehrsatz zeigt, wie die Quadratur des Kreises mit der Rectification desselben zusammenhängt, so daß die Auflösung der einen dieser beiden Aufgaben unmittelbar die der andern nach sich zieht.

§. 274.

Lehrsatz. Die Kreisfläche ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie des Kreises und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

Oder wenn p die Peripherie und r den Halbmesser des Kreises bedeutet, so ist

$$J = \frac{p \cdot r}{2}.$$

Beweis. Man denke sich dem gegebenen Kreise ein regelmäßiges Polygon von beliebiger Seitenzahl umschrieben, und nenne u den Umfang und J' den Inhalt dieses Polygons. Alsdann hat man aus §. 265

$$J' = \frac{u \cdot r}{2}.$$

Wenn man nun die Seitenzahl des Polygons, durch wiederholte Verdoppelung derselben, größer und größer werden läßt, so kommt der Umfang u desselben nach §. 270 immer näher der Kreisperipherie p,

und zugleich kommt sein Inhalt J' immer näher dem Inhalt J der Kreisfläche. Folglich ist auch

$$J = \frac{p \cdot r}{2}$$

d. h. der Inhalt J ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, welches p zur Grundlinie und r zur Höhe hat, w. z. b. w.

Anmerkung. Kürzer kann man diesen Beweis ausdrücken wie folgt:

Der Kreis kann wie ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten, von denen jede unendlich klein ist, angesehen werden. Folglich darf man auf den Kreis unmittelbar den Lehrsatz §. 265 anwenden, woraus sogleich die gesuchte Formel sich ergiebt.

§. 275.

Lehrsatz. Der Inhalt eines Kreises wird gefunden, wenn man das Quadrat seines Halbmessers mit der Zahl π multiplicirt.

Oder: Wenn r den Halbmesser eines Kreises bedeutet, so ist

$$J = r^2\pi.$$

Beweis. Man setze in die Formel des vorigen Paragraphen

$$J = \frac{p \cdot r}{2}$$

für p seinen Werth aus §. 272, nämlich

$$p = 2r\pi.$$

Alsdann erhält man

$$J = \frac{2r\pi \cdot r}{2} = r^2\pi,$$

w. z. b. w.

Beispiele. 1) Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser 44° 7′ Decimalmaß beträgt?

Antw. 6277 □° 30 □′.

2) Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, dessen Umfang 12° beträgt?

Antw. 11□° 46□′.

3) Wie lang ist die Seite eines Quadrats, welches einem Kreise von 17′ Halbmesser inhaltsgleich ist?

Antw. 30′,132.

4) Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises von 698 Quadratmeilen Inhalt?

Antw. 29,812 Meilen.

§. 276.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Kreise verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Oder: Wenn J und J' die Inhalte zweier Kreise bedeuten, deren Halbmesser r und r' sind, so ist

$$J : J' = r^2 : r'^2$$

Beweis. Nach dem vorigen Paragraph ist

$$J = r^2\pi,\ J' = r'^2\pi.$$

Daraus folgt durch Division

$$J : J' = r^2\pi : r'^2\pi$$

und hieraus mit Anwendung von §. 149 der Arithmetik

$$J : J' = r^2 : r'^2,$$

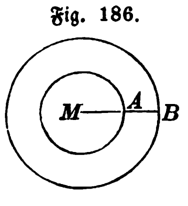
w. z. b. w.

Anmerkung. Es ist auch hier wie im §. 259 einerlei, ob man unter den Quadraten der Halbmesser die Quadrate der Zahlen, welche das Verhältniß der Halbmesser ausdrücken, oder die Flächen der Quadrate, welche über den Halbmessern als Seiten construirt werden können, verstehen will.

§. 277.

Erklärung. Unter einem Kreisringe versteht man die zwischen zwei concentrischen Kreisen enthaltene Fläche.

Fig. 186.



Ein Kreisring ist demnach immer der Differenz der Flächen der beiden Kreise gleich, welche ihn bilden. Oder wenn $MA = r$ und $MB = R$ die Halbmesser dieser beiden Kreise sind, so ist

$$J = R^2\pi - r^2\pi$$

und einfacher

$$J = (R^2 - r^2)\pi.$$

§. 278.

Lehrsatz. Ein Kreisring ist einem Trapez gleich, dessen parallele Seiten die Peripherien der beiden gegebenen con=

centrischen Kreise sind, und dessen Höhe die Differenz der Halbmesser dieser beiden Kreise ist.

Oder: Wenn p und P die Peripherien der beiden gegebenen Kreise und d die Differenz ihrer Halbmesser bedeuten, so ist

$$J = \frac{(P + p)\,d}{2}$$

Beweis. Man nenne r und R die Halbmesser der beiden gegebenen Kreise. Alsdann hat man aus dem vorigen Paragraph

$$J = (R^2 - r^2)\pi,$$

welchen Ausdruck man auch umwandeln kann in

$$J = (R + r)\,(R - r)\pi. \qquad (1.)$$

Nun ist nach §. 272

$$2R\pi = P,\ 2r\pi = p,$$

woraus durch Addition folgt

$$2(R + r)\pi = P + p$$

und weiter

$$(R + r)\pi = \frac{P + p}{2}. \qquad (2.)$$

Ferner ist nach der Voraussetzung

$$R - r = d. \qquad (3.)$$

Substituirt man die Werthe (2) und (3) in (1), so folgt

$$J = \frac{(P + p)\,d}{2}, \qquad (4.)$$

w. z. b. w.

Für die numerische Rechnung macht es keinen erheblichen Unterschied, ob man nach (1) oder nach (4) verfährt.

Beispiel. Wie groß ist der Flächenraum einer Straße von 3° Breite, welche einen kreisförmigen Platz von 24° Durchmesser umgiebt?

Antw. 254 □° 47 □′.

Anmerkung. Wenn man einen Kreis construiren will, der an Fläche eben so groß ist, wie ein gegebener Kreisring, so ziehe man eine Sehne des äußeren Kreises dieses Kreisringes, welche zugleich Tangente des inneren Kreises ist. Diese Sehne wird der Durchmesser des gesuchten Kreises sein. Der Grund liegt in der obigen Formel (1) mit Zuziehung von §. 245.

§. 279.

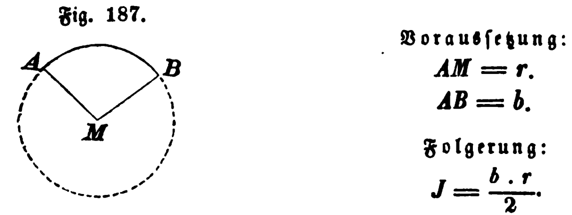
Erklärung. Ein Kreisausschnitt oder Sector ist

ein Theil der Kreisfläche, welcher durch zwei Halbmesser und den zwischen ihnen liegenden Kreisbogen begrenzt wird.

Ein **Kreisabschnitt** oder **Segment** ist ein Theil der Kreisfläche, welcher durch eine Sehne und den ihr zugehörigen Kreisbogen begrenzt wird.

§. 280.

Lehrsatz. Ein Kreisausschnitt ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Bogen des Kreisausschnittes und dessen Höhe der Halbmesser des Kreises ist.



Voraussetzung:

$AM = r.$

$AB = b.$

Folgerung:

$$J = \frac{b \cdot r}{2}.$$

Beweis. Der Kreisausschnitt verhält sich zur ganzen Kreisfläche wie der Bogen des Kreisausschnittes zur Kreisperipherie. Nennt man also p die Kreisperipherie, so hat man, mit Zuziehung von §. 274, zur Bestimmung von J die Proportion

$$p : b = \frac{p \cdot r}{2} : J,$$

woraus nach §. 151 der Arithmetik folgt

$$J = \frac{b \cdot r}{2},$$

w. z. b. w.

Wenn statt des Bogens b der Centriwinkel $AMB = M$ gegeben ist, so kann man daraus den Bogen b durch die Proportion finden

$$360^\circ : M = 2r\pi : b.$$

Man kann zu demselben Zwecke auch die IV. Tafel in des Verfassers fünfstelligen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln S. 98 gebrauchen. Dieselbe liefert für jeden in Graden, Minuten und Secunden gegebenen Winkel die Bogenlänge für den Halbmesser Eins, welche demnach hinterher noch mit dem gegebenen Halbmesser r multiplicirt werden muß, um die Bogenlänge für den Halbmesser r zu geben.

Beispiel. Wie groß ist ein Kreisausschnitt von 42° in einem Kreise von 12′ Halbmesser?

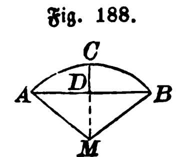
Antw. 52,78 □′.

Anmerkung. Ebenso wie einen Kreisausschnitt kann man auch einen Ringausschnitt bilden, indem man in einem Kreisringe zwei beliebige Halbmesser zieht. Der Ringausschnitt ist einem Trapez gleich, dessen parallele Seiten die beiden den Ringausschnitt begrenzenden Kreisbögen sind und dessen Höhe die Differenz der Halbmesser der beiden Kreise ist.

§. 281.

Zusatz. Der Inhalt eines Kreisabschnitts wird gefunden, wenn man von dem Inhalt des zugehörigen Kreisausschnitts den Inhalt des Dreiecks subtrahirt, welches durch die Sehne des Kreisabschnitts und die beiden Halbmesser des Kreisausschnitts gebildet wird.

Fig. 188.



Oder es ist

$$ABC = MACB - MAB$$

wo man $MACB$ nach §. 280 und MAB nach §. 263 zu berechnen hat, um ABC zu finden.

Gewöhnlich werden zur Inhaltsberechnung eines Kreisabschnitts die Sehne AB und das Perpendikel CD gegeben. Dieses Perpendikel, auf der Mitte D der Sehne AB bis zu seinem Durchschnittspunkt C mit dem Bogen des Kreisabschnitts errichtet, nennt man auch den Pfeil oder die Sagitta des Kreisabschnitts.

Es sei $AB = a$ und $CD = h$. Um daraus den Halbmesser $MA = r$ zu berechnen, hat man in dem rechtwinkeligen Dreieck AMD die Katheten $MD = r - h$ und $AD = \frac{a}{2}$, folglich nach dem Lehrsatze des Pythagoras

$$r^2 = (r - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

d. i.

$$r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

woraus folgt

$$r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

Der Bogen $ACB = b$ oder der Centriwinkel AMB kann auf elementarem Wege nicht berechnet werden (dies ist nur durch Trigonometrie möglich). Am besten entnimmt man hier den Winkel vermittelst des Transporteurs aus einer nach verjüngtem Maßstabe ausgeführten Zeichnung, worauf man den Kreisausschnitt $MACB$ berechnet wie im vorigen Paragraph.

Den Inhalt des Dreiecks MAB bestimmt man aus Grundlinie $AB = a$ und Höhe $MD = r - h$.

Der Inhalt des Kreisabschnitts kann demnach schließlich durch die Formel ausgedrückt werden

$$J = \frac{br}{2} - \frac{a(r-h)}{2}, \qquad (1.)$$

welche für die numerische Rechnung noch etwas bequemer sich umformen läßt in

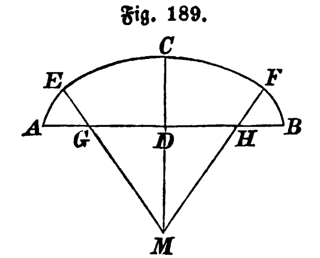
$$J = \frac{ah}{2} + \frac{(b-a)r}{2} \qquad (2.)$$

Beispiel. Wie groß ist der Fluthraum eines kreisbogenförmigen Brückenbogens von 40′ Weite und 8′ Höhe?

Antw. 220 □′.

Anmerkung 1. Brückenbögen werden häufig, um einen größeren Fluthraum zu gewinnen, aus mehreren Kreisbögen zusammengesetzt, z. B. wie ACB, Fig. 189, aus dem mittleren Kreisbogen EF mit dem Halbmesser $ME = MF$, und den beiden gleichen äußeren Kreisbögen AE und BF mit dem Halbmesser $AG = EG = HF = HB$. Einen auf solche Weise construirten Gewölbbogen pflegt man eine Korblinie zu nennen.

Fig. 189.



Um den zwischen diesem Bogen und seiner Sehne enthaltenen Flächenraum zu finden, muß außer der Weite $AB = a$ und der Höhe $CD = h$ noch der Halbmesser $AG = EG = m$ des äußeren Kreisbogens gegeben sein. Es ist nothwendig, diesen Halbmesser kleiner als h zu nehmen. Der Halbmesser $ME = r$ des inneren Kreisbogens kann sodann berechnet werden; denn in dem rechtwinkeligen Dreiecke MGD ist die Hypotenuse $MG = r - m$, die Kathete $MD = r - h$ und die Kathete $GD = \frac{a}{2} - m$ folglich

$$(r-m)^2 = (r-h)^2 + \left(\frac{a}{2} - m\right)^2$$

d. i.

$$r^2 - 2mr + m^2 = r^2 - 2hr + h^2 + \frac{a^2}{4} - am + m^2,$$

woraus folgt

$$r = \frac{a^2 + 4h^2 - 4am}{8\,(h - m)}.$$

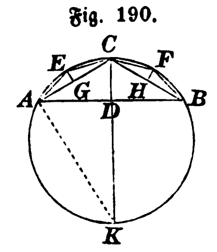
Die Winkel AGE und EMF sind wieder aus der Zeichnung zu entnehmen. Der gesuchte Flächenraum selbst wird

$$ABC = AGE + HBF + EMF - GMH.$$

Hat z. B. ein Brückenbogen, wie oben, 40′ Weite und 8′ Höhe, wird aber durch eine Korblinie gebildet, deren äußere Kreisbögen 5′ Halbmesser haben, so beträgt der Fluthraum dieses Bogens 253,72 □′.

Anmerkung 2. Will man den Inhalt eines Kreisabschnitts ohne Benutzung seines Bogens b (oder seines Centriwinkels, welche beide hier nicht berechnet werden können und nur unzuverlässig zu messen sind) bestimmen, so kann man verfahren wie folgt:

Fig. 190.



Man beschreibe in den Kreisabschnitt, Fig. 190, ein gleichschenkeliges Dreieck ABC, welches die Sehne $AB = a$ zur Grundlinie und den Pfeil $CD = h$ zur Höhe hat. Der Inhalt dieses Dreiecks ist $= \frac{ah}{2}$.

In die beiden übrig gebliebenen Kreisabschnitte beschreibe man wieder gleichschenkelige Dreiecke ACE und CBF, welche die Sehne $AC = CB = a'$ zur Grundlinie und den Pfeil $EG = FH = h'$ zur Höhe haben. Der Inhalt dieser beiden Dreiecke ist $= 2 \,.\, \frac{a'h'}{2}$.

In die vier nun noch übrigen Kreisabschnitte beschreibe man wieder gleichschenkelige Dreiecke (welche in der Figur nicht weiter angezeigt sind), und nehme die Sehne $AE = a''$ zur Grundlinie und den zugehörigen Pfeil $= h''$ zur Höhe. Der Inhalt dieser vier Dreiecke ist $= 4 \,.\, \frac{a''h''}{2}$.

Fährt man so weiter fort, bezeichnet Sehne und Pfeil der nun folgenden 8 Kreisabschnitte mit a''' und h''' 2c. und addirt alle Dreiecke, so erhält man den Inhalt des gegebenen Kreisabschnitts durch die unendliche Reihe ausgedrückt

$$J = \frac{ah}{2} + 2 \,.\, \frac{a'h'}{2} + 4 \,.\, \frac{a''h''}{2} + 8 \,.\, \frac{a'''h'''}{2} + \cdots \qquad (3.)$$

Dieser Ausdruck läßt für die praktische Rechnung noch eine Vereinfachung zu, indem man statt der Werthe von $h, h', h'', h''', \ldots$ den Halbmesser r einführt. Nach §. 241 ist $AC = a'$ mittlere Proportionale zwischen $CD = h$ und $CK = 2r$, oder

$$2r : a' = a' : h,$$

woraus folgt

$$h = \frac{a'^2}{2r};$$

und ebenso hat man weiter

$$h' = \frac{a''^2}{2r},\ h'' = \frac{a'''^2}{2r},\ \text{u. s. w.}$$

Durch Substitution dieser Werthe wird

$$J = \frac{aa'^2}{4r} + 2 \cdot \frac{a'a''^2}{4r} + 4 \cdot \frac{a''a'''^2}{4r} + 8 \cdot \frac{a'''a''''^2}{4r} + \cdots \qquad (4.)$$

Was die Berechnung der Werthe a', a'', a''' ꝛc. betrifft, so entstehen dieselben successiv aus einander auf dieselbe Weise, wie in §. 269 aus der Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen Polygons die Seite des eingeschriebenen Polygons von doppelter Seitenzahl hergeleitet worden ist. Man kann aber auch, wenn man es für hinreichend genau hält, diese Werthe aus einer nach verjüngtem Maßstabe entworfenen Zeichnung nehmen.

Die in der Formel (4) enthaltene unendliche Reihe bricht in der numerischen Berechnung immer von selbst da ab, wo ihre Glieder so klein werden, daß sie zu der letzten in Betracht zu ziehenden Decimalstelle keinen Beitrag mehr geben.

Z. B. für $a' = 40'$ und $h = 8'$ (s. oben) erhält man

$$J = 160 + 44{,}68 + 11{,}48 + 2{,}89 + 0{,}72 + 0{,}18 + 0{,}04 + 0{,}01,$$

was zur Summe giebt

$$J = 220{,}00\ \square'.$$

Das hier angewandte Verfahren zur Inhaltsberechnung des Kreisabschnitts giebt ein anschauliches Beispiel der berühmten Exhaustions-Methode der Alten, welche zuerst von Archimedes angewandt wurde und deren Wesen darin besteht, von der zu bestimmenden Fläche nach einem gewissen Gesetze nach und nach bekannte Theile hinwegzunehmen und so durch einen Fortschritt ins Unendliche die Fläche zu erschöpfen.

Anmerkung 3. Man hat zuweilen den Inhalt eines Kreisabschnitts zu bestimmen, dessen Pfeil im Vergleich mit seiner Sehne sehr klein ist. Für diesen Fall läßt die Formel (4) sich in einen einfachen geschlossenen Ausdruck zusammenziehen.

Wenn nämlich CD, Fig. 190, sehr klein ist im Vergleich mit AB, so ist AC wenig größer als AD, und man kann mithin angenähert setzen

$$a' = \frac{a}{2}$$

und folglich um so mehr auch

$$a'' = \frac{a'}{2} = \frac{a}{4},\ a''' = \frac{a''}{2} = \frac{a}{8},\ \text{u. s. w.}$$

Setzt man diese Werthe in (4), so kommt

$$J = \frac{a^3}{16r} + \frac{a^3}{64r} + \frac{a^3}{256r} + \cdots$$

$$= \frac{a^3}{16r}\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \cdots\right).$$

Der hier vor der Klammer stehende Factor $\frac{a^3}{16r}$ ist einerlei mit $\frac{ah}{2}$, wie aus der Vergleichung mit (3) unmittelbar hervorgeht. Die eingeklammerte Reihe dagegen ist eine unendliche geometrische Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$, deren Summe nach Arithm. §. 175 berechnet $= \frac{4}{3}$ wird. Mithin ist endlich

$$J = \frac{2ah}{3}, \qquad (5.)$$

d. i. der Inhalt eines sehr flachen Kreisabschnitts beträgt zwei Drittel eines Rechtecks, welches die Sehne des Kreisabschnitts zur Grundlinie und den Pfeil desselben zur Höhe hat*).

Wollte man das obige Beispiel $a = 40'$ und $h = 8'$ nach der Formel (5) berechnen, so würde man erhalten $J = 213\frac{1}{3}\square'$, d. h. um $6\frac{2}{3}\ \square'$ zu klein. Man sieht hieraus schon, welche Annäherung diese Formel selbst da giebt, wo h nicht klein ist im Vergleich mit a. Um aber auch in solchen Fällen vollkommen genau zu rechnen, wird man am besten thun, die ersten Schritte der Rechnung nach der Formel (4) zu führen und den Schluß dadurch in die Formel (5) überzuleiten, daß man das letzte nach (4) berechnete Glied um seinen dritten Theil vergrößert. So z. B. erhält man, indem man

*) In der Analytischen Geometrie §. 153 wird bewiesen, daß die Formel (5), welche hier nur als Näherungsformel auftritt, vollkommen genau richtig ist, wenn man den Bogen ACB als Bogen einer Parabel annimmt, welche im Punkte C ihren Scheitel hat.

von der obigen nach (4) geführten Zahlenrechnung nur drei Glieder beibehält und dem letzten Gliede die hier angezeigte Correction beifügt,

$$J = 160 + 44{,}68 + 11{,}48 + \frac{11{,}48}{3} = 219{,}99 \, \square'.$$

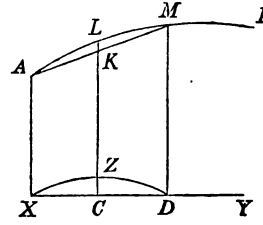
Beiläufig kann man noch bemerken, daß die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (2) und (5) für die Bogenlänge b eines sehr flachen Kreisabschnitts den Ausdruck giebt

$$b = a\left(1 + \frac{h}{3r}\right). \qquad (6.)$$

Anmerkung 4. Aus der Formel (5) läßt sich eine Methode ableiten, um angenähert den Inhalt einer Fläche zu bestimmen, welche durch eine beliebige krumme Linie begrenzt wird.

Es sei AB, Fig. 191, eine krumme Linie, welche eine Fläche begrenzt, und XY eine willkürlich angenommene Abscissenlinie, auf welcher in gleichen Abständen $XC = CD$ vorläufig die drei rechtwinkeligen Ordinaten XA, CL, DM errichtet sind. Die Abstände dieser Ordinaten seien so klein genommen, daß der Bogen ALM keine zu starke Krümmung hat. Man setze $XC = CD = a$ und $XA = b$, $CL = b'$, $DM = b''$.

Fig. 191.



Zieht man die gerade Linie AM, so wird durch dieselbe das zwischen den Ordinaten XA und DM enthaltene Flächenstück in das Trapez $XDMA$ und den Abschnitt AML zerlegt. Das Trapez $XDMA$, dessen parallele Seiten b und b'' sind und dessen Höhe $= 2a$ ist, hat den Inhalt

$$a\,(b + b'').$$

Die Mittellinie dieses Trapez beträgt $CK = \frac{b + b''}{2}$, folglich ist

$$KL = b' - \frac{b + b''}{2}.$$

Um den Inhalt des Abschnitts AML zu bestimmen, mache man $CZ = KL$ und denke sich durch die Punkte X, Z, D eine krumme Linie gelegt, welche einen Abschnitt XDZ von demselben Inhalte wie AML hervorbringt. Diesen Abschnitt XDZ kann man an-

genähert wie einen Kreisabschnitt ansehen, dessen Pfeil im Vergleich mit seiner Sehne klein ist; die Sehne dieses Kreisabschnitts ist $= 2a$, der Pfeil $= b' - \frac{b + b''}{2}$, und mithin nach (5) sein Inhalt

$$\frac{4a}{3}\left(b' - \frac{b + b''}{2}\right).$$

Durch Addition der beiden gefundenen Werthe erhält man für den Inhalt des Flächenstücks $XDMLA$

$$J = a\,(b + b'') + \frac{4a}{3}\left(b' - \frac{b + b''}{2}\right),$$

d. i.

$$J = \frac{a}{3}\,(b + 4b' + b''). \qquad (7.)$$

Sollte der Bogen ALM seine convexe Seite nicht, wie in der Figur, nach oben, sondern nach unten wenden, d. h. $CL < CK$ sein, so läßt sich leicht durch entsprechende Abänderung der Figur zeigen, daß der Ausdruck für J in (7) dessen ungeachtet derselbe wird.

Es seien nun solcher Theile wie $XC = CD = a$ auf der Abscissen-Linie XY beliebig viele, jedoch in gerader Anzahl vorhanden, und die entsprechenden Ordinaten seien der Reihe nach

$$b,\ b',\ b'',\ b''',\ \ldots\ b^{(n-2)},\ b^{(n-1)},\ b^{(n)}$$

(man sehe §. 266, Fig. 183a). Alsdann erscheint die ganze zwischen den Ordinaten b und $b^{(n)}$ enthaltene Fläche wie eine Summe von Flächenstücken, deren Inhalte nach der Formel (7) zu berechnen sind. Mithin erhält man für die ganze Fläche den Ausdruck

$$J = \frac{a}{3}\,(b + 4b' + b'') + \frac{a}{3}\,(b'' + 4b''' + b'''') + \ldots$$

$$\ldots + \frac{a}{3}\,(b^{(n-2)} + 4b^{(n-1)} + b^{(n)}),$$

d. i.

$$J = \frac{a}{3}\,(b + 4b' + 2b'' + 4b''' + 2b'''' + \cdots 4b^{(n-1)} + b^{(n)}). \quad (8).$$

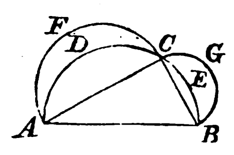
Die in dieser Formel enthaltene Regel, welche von sehr vielfältigem Gebrauche ist, wird nach ihrem Erfinder die Simpson'sche Regel genannt.

Das Beispiel §. 266 Anm., nach dieser Formel berechnet, giebt $J = 280\ \square^{\circ}\ 33\ \square'$.

§. 282.

Lehrsatz des Hippokrates. Wenn über den drei Seiten eines gegebenen rechtwinkeligen Dreiecks, als Durchmessern, Halbkreise construirt werden, so ist die Summe der beiden über den Katheten entstehenden Mondstücke (lunulae) inhaltsgleich dem gegebenen Dreiecke.

Fig. 192.



Voraussetzung:

$\angle ACB = R.$

Folgerung:

$☾ ADCF + ☾ BECG = \triangle ABC.$

Beweis. Nach §. 275 ist der Inhalt des Kreises, welcher AB zum Durchmesser hat, $= (\frac{1}{2} AB)^2\pi$, d. i. $= \frac{1}{4} AB^2\pi$. Folglich hat man für die Fläche des über AB construirten Halbkreises

$$ABECD = \tfrac{1}{8} AB^2\pi.$$

Ebenso erhält man für die Flächen der über AC und BC construirten beiden Halbkreise

$$ACF = \tfrac{1}{8} AC^2\pi.$$

$$BCG = \tfrac{1}{8} BC^2\pi.$$

Nun ist nach dem Lehrsatze des Pythagoras

$$AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

folglich auch, wenn man diese Gleichung mit $\frac{1}{8}\pi$ multiplicirt,

$$\tfrac{1}{8} AC^2\pi + \tfrac{1}{8} BC^2\pi = \tfrac{1}{8} AB^2\pi,$$

d. i. $ACF + BCG = ABECD.$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die beiden Kreisabschnitte ACD und BCE, so hat man endlich

$$☾ ADCF + ☾ BECG = \triangle ABC,$$

w. z. b. w.

Anmerkung 1. Diesen Satz verdankt man dem griechischen Mathematiker Hippokrates von Chios, welcher um 450 vor C. G. lebte (nicht zu verwechseln mit dem berühmten Arzt Hippokrates von Kos, der nahe zu derselben Zeit lebte). Hippokrates fand diesen Satz bei seinen Bemühungen, die Quadratur des Kreises durch Construction zu lösen und gab damit das erste Beispiel, um eine durch krumme Linien begrenzte Fläche in eine geradlinige Figur zu verwandeln. Auch ist Hippokrates der erste gewesen,

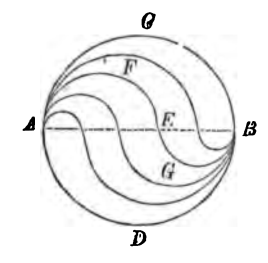
welcher Elemente der Geometrie geschrieben hat, die indessen durch spätere Werke, besonders durch die Elemente der Euklides verdrängt worden und so verloren gegangen sind.

Wird das Dreieck *ABC* durch ein zweites an die Hypotenuse *AB* gelegtes congruentes Dreieck zu einem Rechtecke ergänzt, und über diesem zweiten Dreiecke dieselbe Construction wiederholt, so erhält man vier Mondstücke, deren Summe diesem Rechteck gleich ist.

Nimmt man außerdem *AC* = *BC*, so werden diese vier Mondstücke gleich groß und die Summe derselben wird einem Quadrat gleich. Dies ist das älteste bekannte Beispiel, um eine von krummen Linien begrenzte Fläche durch ein inhaltsgleiches Quadrat darzustellen.

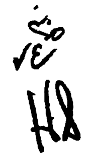
Anmerkung 2. Wenn man den Durchmesser *AB* eines Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilt (z. B. in 5), und durch jeden Theilpunkt, z. B. *E*, eine Schlangenlinie legt, welche aus den beiden Halbkreisen *AFE* und *EGB* zusammengesetzt ist, so zerlegen alle diese Schlangenlinien die Kreisfläche in Theile, welche unter sich inhaltsgleich sind und von denen jeder mit dem gegebenen Kreise gleichen Umfang hat.

Fig. 193.



Der Beweis beruht, ähnlich wie der obige, auf einer Addition und Subtraction von Halbkreisen.

Die von je zwei der vorbezeichneten Schlangenlinien begrenzte Figur war bei den alten Mathematikern unter dem Namen Pelekoid (πελεκοειδής) bekannt.




JAN 4 - 1929

